1 Principe fondamental

1.1 La règle du produit nul

Propriété 1 (Règle du produit nul). *Un produit de facteurs est nul si et seulement si **au moins un** des facteurs est nul.*

Autrement dit, pour deux nombres réels A et B :

$$A \times B = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Remarque 1. *Cette propriété se généralise à un nombre quelconque de facteurs :*

$$A \times B \times C = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0 \text{ ou } C = 0$$

Exemple 1.
- $3 \times 0 = 0$ *(le deuxième facteur est nul)*
- $0 \times (-5) = 0$ *(le premier facteur est nul)*
- $4 \times 2 = 8 \neq 0$ *(aucun facteur n'est nul)*

1.2 Principe de résolution

Méthode 1 (Résoudre une équation produit). *Pour résoudre une équation de la forme $A \times B = 0$:*

1. *Identifier les deux facteurs A et B*
2. *Résoudre séparément $A = 0$ et $B = 0$*
3. *L'ensemble des solutions est la réunion des solutions de chaque équation*

Exemple 2. *Résoudre $(x-2)(x+5) = 0$*

Solution :
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Donc : $x - 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$
$x = 2$ *ou* $x = -5$
L'ensemble des solutions est : $S = \{-5; 2\}$

2 Équations simples

2.1 Équation à deux facteurs

Exemple 3. *Résoudre les équations suivantes :*

1) $(x-3)(x+1) = 0$
$x - 3 = 0$ *ou* $x + 1 = 0$
$x = 3$ *ou* $x = -1$
$S = \{-1; 3\}$
2) $(2x+6)(x-4) = 0$
$2x + 6 = 0$ *ou* $x - 4 = 0$
$x = -3$ *ou* $x = 4$
$S = \{-3; 4\}$
3) $x(x+7) = 0$
$x = 0$ *ou* $x + 7 = 0$
$x = 0$ *ou* $x = -7$
$S = \{-7; 0\}$
4) $(3x-9)(5x+15) = 0$

$3x - 9 = 0$ *ou* $5x + 15 = 0$
$3x = 9$ *ou* $5x = -15$
$x = 3$ *ou* $x = -3$
$S = \{-3; 3\}$

2.2 Équation à trois facteurs ou plus

Exemple 4. *Résoudre les équations suivantes :*
1) $(x-1)(x+2)(x-5) = 0$
$x - 1 = 0$ *ou* $x + 2 = 0$ *ou* $x - 5 = 0$
$x = 1$ *ou* $x = -2$ *ou* $x = 5$
$S = \{-2; 1; 5\}$
2) $x(2x+4)(x-3) = 0$
$x = 0$ *ou* $2x + 4 = 0$ *ou* $x - 3 = 0$
$x = 0$ *ou* $x = -2$ *ou* $x = 3$
$S = \{-2; 0; 3\}$
3) $(x+1)^2(x-4) = 0$
$x + 1 = 0$ *ou* $x - 4 = 0$
$x = -1$ *ou* $x = 4$
$S = \{-1; 4\}$
Remarque : *Le facteur* $(x+1)$ *apparaît deux fois (au carré), mais cela ne change pas les solutions.*

3 Factorisation préalable

3.1 Mise en facteur

Méthode 2. *Lorsque l'équation n'est pas directement sous forme de produit, il faut :*

1. *Tout ramener d'un côté de l'équation (= 0 de l'autre côté)*
2. *Factoriser l'expression obtenue*
3. *Appliquer la règle du produit nul*

Exemple 5. ***1)*** *Résoudre* $x^2 - 5x = 0$
Factorisation : $x(x-5) = 0$
$x = 0$ *ou* $x - 5 = 0$
$x = 0$ *ou* $x = 5$
$S = \{0; 5\}$
2) *Résoudre* $3x^2 + 6x = 0$
Factorisation : $3x(x+2) = 0$
$3x = 0$ *ou* $x + 2 = 0$
$x = 0$ *ou* $x = -2$
$S = \{-2; 0\}$
3) *Résoudre* $(x+1)(x-2) + (x+1)(2x+3) = 0$
Facteur commun : $(x+1)$
$(x+1)[(x-2) + (2x+3)] = 0$
$(x+1)(3x+1) = 0$
$x + 1 = 0$ *ou* $3x + 1 = 0$
$x = -1$ *ou* $x = -\dfrac{1}{3}$
$S = \left\{-1; -\dfrac{1}{3}\right\}$

3.2 Identités remarquables

Propriété 2 (Rappel des identités remarquables)**.**

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Exemple 6. *1) Résoudre* $x^2 - 16 = 0$
Factorisation : $x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4) = 0$
$x - 4 = 0$ *ou* $x + 4 = 0$
$x = 4$ *ou* $x = -4$
$S = \{-4; 4\}$
2) Résoudre $4x^2 - 25 = 0$
Factorisation : $(2x)^2 - 5^2 = (2x-5)(2x+5) = 0$
$2x - 5 = 0$ *ou* $2x + 5 = 0$
$x = \dfrac{5}{2}$ *ou* $x = -\dfrac{5}{2}$
$S = \left\{-\dfrac{5}{2}; \dfrac{5}{2}\right\}$
3) Résoudre $x^2 + 6x + 9 = 0$
Factorisation : $(x+3)^2 = 0$
$x + 3 = 0$
$x = -3$
$S = \{-3\}$
4) Résoudre $9x^2 - 12x + 4 = 0$
Factorisation : $(3x-2)^2 = 0$
$3x - 2 = 0$
$x = \dfrac{2}{3}$
$S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

4 Équations du second degré

4.1 Forme générale et discriminant

Définition 1. *Une équation du second degré est une équation de la forme :*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Propriété 3 (Discriminant)**.** *On appelle* ***discriminant*** *de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *le nombre :*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le nombre de solutions dépend du signe de Δ *:*

- *Si* $\Delta > 0$ *: deux solutions distinctes*
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- *Si* $\Delta = 0$ *: une solution double*
$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
- *Si* $\Delta < 0$ *: aucune solution réelle*

4.2 Résolution par discriminant

Méthode 3 (Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$). *1. Identifier a, b et c*

2. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$

3. Étudier le signe de Δ

4. Appliquer les formules correspondantes

Exemple 7. ***1)*** *Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$*

$a = 1,\ b = -5,\ c = 6$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

Deux solutions :

$x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ *et* $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

$S = \{2; 3\}$

2) *Résoudre $2x^2 - 8x + 8 = 0$*

$a = 2,\ b = -8,\ c = 8$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 64 - 64 = 0$

Une solution :

$x_0 = \dfrac{8}{2 \times 2} = 2$

$S = \{2\}$

3) *Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$*

$a = 1,\ b = 1,\ c = 1$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

Aucune solution réelle.

$S = \emptyset$

4) *Résoudre $-3x^2 + 6x + 9 = 0$*

$a = -3,\ b = 6,\ c = 9$

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times 9 = 36 + 108 = 144 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 12$

$x_1 = \dfrac{-6-12}{-6} = \dfrac{-18}{-6} = 3$

$x_2 = \dfrac{-6+12}{-6} = \dfrac{6}{-6} = -1$

$S = \{-1; 3\}$

4.3 Factorisation d'un trinôme

Propriété 4. *Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 (c'est-à-dire $\Delta > 0$), alors :*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple 8. *Factoriser $x^2 - 5x + 6$*

On résout d'abord $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$\Delta = 25 - 24 = 1$, *donc $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$*

Factorisation : $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

On peut vérifier : $(x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$ ✓

5 Équations se ramenant à un produit nul

5.1 Équations avec fractions

Méthode 4. *Pour résoudre une équation de la forme $\dfrac{A}{B} = 0$:*

1. *Une fraction est nulle si et seulement si son **numérateur** est nul et son **dénominateur** non nul*
2. *Résoudre* $A = 0$
3. *Vérifier que les solutions ne annulent pas* B

Exemple 9. *1) Résoudre* $\dfrac{x-3}{x+2} = 0$
Le numérateur doit être nul : $x - 3 = 0$, *donc* $x = 3$
Vérification : pour $x = 3$, *le dénominateur vaut* $3 + 2 = 5 \neq 0$ ✓
$S = \{3\}$
2) Résoudre $\dfrac{(x-1)(x+5)}{2x-6} = 0$
Le numérateur doit être nul : $(x-1)(x+5) = 0$
$x = 1$ *ou* $x = -5$
Vérifications :

- *Pour* $x = 1$ *: dénominateur* $= 2(1) - 6 = -4 \neq 0$ ✓
- *Pour* $x = -5$ *: dénominateur* $= 2(-5) - 6 = -16 \neq 0$ ✓

$S = \{-5; 1\}$
3) Résoudre $\dfrac{x^2-4}{x-2} = 0$
Le numérateur doit être nul : $x^2 - 4 = 0$
$(x-2)(x+2) = 0$
$x = 2$ *ou* $x = -2$
Vérifications :

- *Pour* $x = 2$ *: dénominateur* $= 2 - 2 = 0$ ✗ *(valeur interdite)*
- *Pour* $x = -2$ *: dénominateur* $= -2 - 2 = -4 \neq 0$ ✓

$S = \{-2\}$

5.2 Équations avec racines carrées

Méthode 5. *Pour résoudre une équation contenant* $\sqrt{A}$ *:*

1. *Isoler la racine carrée si possible*
2. *Élever au carré les deux membres (avec précautions)*
3. *Résoudre l'équation obtenue*
4. *Vérifier les solutions dans l'équation initiale*

Exemple 10. *1) Résoudre* $\sqrt{x} = 3$
En élevant au carré : $x = 9$
Vérification : $\sqrt{9} = 3$ ✓
$S = \{9\}$
2) Résoudre $\sqrt{2x+1} = x - 1$
Condition : $2x + 1 \geq 0$ *et* $x - 1 \geq 0$, *donc* $x \geq 1$
En élevant au carré : $2x + 1 = (x-1)^2$
$2x + 1 = x^2 - 2x + 1$
$x^2 - 4x = 0$
$x(x-4) = 0$
$x = 0$ *ou* $x = 4$
Vérifications :

- $x = 0$: *ne vérifie pas la condition* $x \geq 1$ ✗
- $x = 4$: $\sqrt{2 \times 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$ *et* $4 - 1 = 3$ ✓

$S = \{4\}$

6 Applications

6.1 Problèmes géométriques

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Un rectangle a pour longueur* $x + 5$ *et pour largeur* $x - 2$. *Son aire vaut 24 cm²*. *Déterminer* x.

Solution :
Aire = longueur × largeur
$(x + 5)(x - 2) = 24$
$x^2 - 2x + 5x - 10 = 24$
$x^2 + 3x - 10 = 24$
$x^2 + 3x - 34 = 0$
$\Delta = 9 + 136 = 145 > 0$
$x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{145}}{2} \approx -7{,}5$ *(impossible car* $x > 2$*)*
$x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{145}}{2} \approx 4{,}5$
$x \approx 4{,}5$ *cm*

6.2 Problèmes d'âge

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Le produit de l'âge de Paul et de son âge dans 4 ans est égal à 60. Quel est l'âge de Paul ?*

Solution :
Soit x *l'âge actuel de Paul.*
$x(x + 4) = 60$
$x^2 + 4x = 60$
$x^2 + 4x - 60 = 0$
$\Delta = 16 + 240 = 256 = 16^2$
$x_1 = \dfrac{-4 - 16}{2} = -10$ *(impossible)*
$x_2 = \dfrac{-4 + 16}{2} = 6$
Paul a 6 ans.

6.3 Problèmes de trajectoire

Application 3. ***Exercice 3 :*** *La hauteur* $h(t)$ *(en mètres) d'une balle lancée en l'air est donnée par :*

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1$$

où t *est le temps en secondes.*

À quels instants la balle se trouve-t-elle à 16 m de hauteur ?

Solution :
On résout $h(t) = 16$:
$-5t^2 + 20t + 1 = 16$
$-5t^2 + 20t - 15 = 0$

On divise par -5 *:* $t^2 - 4t + 3 = 0$
$\Delta = 16 - 12 = 4$
$t_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1\ s$
$t_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3\ s$
La balle est à 16 m à $t = 1\ s$ *(en montant) et à* $t = 3\ s$ *(en descendant).*

7 Tableaux de signes

7.1 Signe d'un produit

Méthode 6. *Pour étudier le signe de* $(x-a)(x-b)$ *avec* $a < b$ *:*

1. *Déterminer les racines (valeurs qui annulent le produit)*
2. *Faire un tableau de signes*
3. *Le signe du produit est déterminé par la règle des signes*

Exemple 11. *Étudier le signe de* $(x-2)(x+3)$
Racines : $x = 2$ *et* $x = -3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(x-2)(x+3) > 0$ *pour* $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$
$(x-2)(x+3) < 0$ *pour* $x \in]-3; 2[$

8 Résumé des méthodes

Type d'équation	**Méthode**	**Exemple**
$AB = 0$	$A = 0$ ou $B = 0$	$(x-1)(x+2) = 0$
$x^2 - a^2 = 0$	$(x-a)(x+a) = 0$	$x^2 - 9 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	Discriminant Δ	$x^2 - 5x + 6 = 0$
$\dfrac{A}{B} = 0$	$A = 0$ et $B \neq 0$	$\dfrac{x-3}{x+1} = 0$

Formulaire du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$

Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta > 0$	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	Pas de solution réelle