1 Introduction

Définition 1. *Une* ***équation différentielle*** *est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir cette fonction ainsi que ses dérivées.*

Exemple 1. *Les équations suivantes sont des équations différentielles :*
- $y' = 2y$
- $y' + 3y = 5$
- $y'' - 4y' + 3y = 0$
- $y' = y^2 + 1$

où y désigne une fonction dérivable de la variable x (ou t pour le temps).

Définition 2. ***Résoudre*** *une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur I qui vérifient l'équation.*

Ces fonctions sont appelées ***solutions*** *de l'équation différentielle.*

2 Équation différentielle $y' = ay$

2.1 Définition et théorème

Définition 3. *On appelle équation différentielle du type $y' = ay$ toute équation de la forme :*

$$y' = ay$$

où a est un nombre réel et y une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1 (Solutions de $y' = ay$)**.** *Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :*

$$y(x) = Ce^{ax}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Remarque 1.
- *Il existe une* ***infinité*** *de solutions (une pour chaque valeur de C)*
- *La fonction nulle $y = 0$ est toujours solution (pour $C = 0$)*

2.2 Condition initiale

Théorème 2 (Solution particulière)**.** *Pour déterminer une solution unique de l'équation $y' = ay$, on impose une* ***condition initiale*** *de la forme $y(x_0) = y_0$.*

Il existe alors une unique solution vérifiant cette condition initiale.

Méthode 1 (Résolution avec condition initiale)**.** *Pour résoudre $y' = ay$ avec $y(x_0) = y_0$:*
1. *Écrire la solution générale : $y(x) = Ce^{ax}$*
2. *Utiliser la condition initiale : $y(x_0) = y_0$*
3. *En déduire la valeur de C*
4. *Écrire la solution particulière*

Exemple 2. *Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$ avec la condition initiale $y(0) = 2$.*

Solution :

Étape 1 : *La solution générale de $y' = 3y$ est $y(x) = Ce^{3x}$*

Étape 2 : *On utilise $y(0) = 2$:*

$$y(0) = Ce^{3\times 0} = Ce^0 = C = 2$$

Étape 3 : *La solution particulière est donc :*

$$y(x) = 2e^{3x}$$

2.3 Exemples de résolution

Exemple 3. ***Exemple 1 :*** *Résoudre* $y' = -2y$
Solution générale : $y(x) = Ce^{-2x}$ *où* $C \in \mathbb{R}$
Exemple 2 : *Résoudre* $y' = -2y$ *avec* $y(1) = 5$
Solution générale : $y(x) = Ce^{-2x}$
Condition initiale : $y(1) = Ce^{-2} = 5$*, donc* $C = 5e^2$
Solution particulière : $y(x) = 5e^2 \times e^{-2x} = 5e^{2-2x}$
Exemple 3 : *Résoudre* $y' = 0{,}5y$ *avec* $y(0) = 10$
Solution générale : $y(x) = Ce^{0{,}5x}$
Condition initiale : $y(0) = Ce^0 = C = 10$
Solution particulière : $y(x) = 10e^{0{,}5x}$

3 Équation différentielle $y' = ay + b$

3.1 Définition et théorème

Définition 4. *On appelle équation différentielle du type* $y' = ay + b$ *toute équation de la forme :*

$$y' = ay + b$$

où a *et* b *sont deux nombres réels avec* $a \neq 0$*, et* y *une fonction de la variable* x*, dérivable sur* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 3 (Solutions de $y' = ay + b$)**.** *Les solutions de l'équation différentielle* $y' = ay + b$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions de la forme :*

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

où C *est une constante réelle quelconque.*

Remarque 2.
— *La fonction constante* $y_0 = -\dfrac{b}{a}$ *est appelée* ***solution particulière constante*** *ou* ***solution d'équilibre***
— *On peut vérifier : si* $y = -\dfrac{b}{a}$*, alors* $y' = 0$ *et* $ay + b = a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = 0$

3.2 Méthode de résolution

Méthode 2 (Résolution de $y' = ay + b$)**.** *Pour résoudre* $y' = ay + b$ *:*

1. *Calculer la solution d'équilibre :* $y_0 = -\dfrac{b}{a}$
2. *Écrire la solution générale :* $y(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$
3. *Si condition initiale* $y(x_0) = y_1$ *: déterminer* C
4. *Écrire la solution particulière*

Exemple 4. *Résoudre* $y' = 2y + 6$ *avec la condition initiale* $y(0) = 1$*.*
Solution :
Étape 1 : *Solution d'équilibre :* $y_0 = -\dfrac{6}{2} = -3$
Étape 2 : *Solution générale :* $y(x) = Ce^{2x} - 3$
Étape 3 : *Condition initiale* $y(0) = 1$ *:*

$$y(0) = Ce^0 - 3 = C - 3 = 1$$

Donc $C = 4$
Étape 4 : *Solution particulière :* $y(x) = 4e^{2x} - 3$

3.3 Exemples d'application

Exemple 5. ***Exemple 1 :*** *Résoudre* $y' = -y + 5$

Solution d'équilibre : $y_0 = -\dfrac{5}{-1} = 5$

Solution générale : $y(x) = Ce^{-x} + 5$ *où* $C \in \mathbb{R}$

Exemple 2 : *Résoudre* $y' = 3y - 9$ *avec* $y(0) = 7$

Solution d'équilibre : $y_0 = -\dfrac{-9}{3} = 3$

Solution générale : $y(x) = Ce^{3x} + 3$

Condition initiale : $y(0) = C + 3 = 7$, *donc* $C = 4$

Solution particulière : $y(x) = 4e^{3x} + 3$

Exemple 3 : *Résoudre* $y' = -2y + 8$ *avec* $y(1) = 2$

Solution d'équilibre : $y_0 = -\dfrac{8}{-2} = 4$

Solution générale : $y(x) = Ce^{-2x} + 4$

Condition initiale : $y(1) = Ce^{-2} + 4 = 2$

Donc $Ce^{-2} = -2$, *d'où* $C = -2e^2$

Solution particulière : $y(x) = -2e^2 \times e^{-2x} + 4 = -2e^{2-2x} + 4$

4 Méthode alternative : variation de la constante

Méthode 3 (Variation de la constante). *Pour résoudre* $y' = ay + b$, *on peut utiliser la méthode suivante :*

1. *Résoudre l'équation homogène* $y' = ay$ *:* $y_h = Ce^{ax}$
2. *Chercher une solution particulière constante* $y_p = k$
3. *En remplaçant dans l'équation :* $0 = ak + b$, *donc* $k = -\dfrac{b}{a}$
4. *La solution générale est :* $y = y_h + y_p = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$

5 Applications concrètes

5.1 Croissance et décroissance exponentielle

Application 1 (Évolution d'une population). *Une population de bactéries évolue selon l'équation différentielle :*

$$P'(t) = 0{,}2P(t)$$

où $P(t)$ *représente le nombre de bactéries à l'instant* t *(en heures).*

À l'instant $t = 0$, *il y a 1000 bactéries.*

Question : *Déterminer le nombre de bactéries après 5 heures.*

Solution :

Solution générale : $P(t) = Ce^{0{,}2t}$

Condition initiale : $P(0) = C = 1000$

Solution particulière : $P(t) = 1000e^{0{,}2t}$

Après 5 heures : $P(5) = 1000e^{0{,}2\times 5} = 1000e = 1000 \times 2{,}718 \approx 2718$ *bactéries*

5.2 Refroidissement d'un corps

Application 2 (Loi de Newton). *La température $T(t)$ d'un corps qui refroidit dans un milieu à température constante T_a vérifie :*

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a)$$

où $k > 0$ est une constante.

On peut réécrire : $T'(t) = -kT(t) + kT_a$
C'est une équation de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $b = kT_a$.
***Exemple :** Un café à 90°C est placé dans une pièce à 20°C. On a $k = 0{,}1$ min^{-1}.*
Équation : $T'(t) = -0{,}1T(t) + 2$
Solution d'équilibre : $T_0 = -\dfrac{2}{-0{,}1} = 20\,^\circ C$
Solution générale : $T(t) = Ce^{-0{,}1t} + 20$
Condition initiale : $T(0) = C + 20 = 90$, donc $C = 70$
Solution : $T(t) = 70e^{-0{,}1t} + 20$
Après 10 minutes : $T(10) = 70e^{-1} + 20 \approx 45{,}8\,^\circ C$

5.3 Circuit électrique RC

Application 3 (Charge d'un condensateur). *Dans un circuit RC alimenté par une tension constante E, la charge $q(t)$ du condensateur vérifie :*

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E - q(t)/C}{R}$$

En posant $\tau = RC$ (constante de temps), on obtient :

$$q'(t) = -\frac{1}{\tau}q(t) + \frac{E}{\tau R}$$

C'est une équation de la forme $y' = ay + b$.

6 Exercices types

Application 4. ***Exercice 1 :** Déterminer la solution de $y' = 4y$ telle que $y(0) = 3$.*
Solution :
$y(x) = Ce^{4x}$
$y(0) = C = 3$
Donc $y(x) = 3e^{4x}$

Application 5. ***Exercice 2 :** Résoudre $2y' - 6y = 0$ avec $y(1) = e^3$.*
Solution :
On divise par 2 : $y' = 3y$
$y(x) = Ce^{3x}$
$y(1) = Ce^3 = e^3$, donc $C = 1$
$y(x) = e^{3x}$

Application 6. ***Exercice 3 :** Résoudre $y' + 2y = 10$ avec $y(0) = 8$.*
Solution :
On réécrit : $y' = -2y + 10$
Solution d'équilibre : $y_0 = -\dfrac{10}{-2} = 5$
Solution générale : $y(x) = Ce^{-2x} + 5$
$y(0) = C + 5 = 8$, donc $C = 3$
$y(x) = 3e^{-2x} + 5$

7 Tableau récapitulatif

Type d'équation	**Solution générale**	**Remarques**
$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax}$	$C \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b$	$y(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$	$a \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$ Solution d'équilibre : $y_0 = -\dfrac{b}{a}$

Remarque 3. ***Points clés à retenir :***

— *Une équation différentielle a une infinité de solutions*

— *Une condition initiale détermine une solution unique*

— *Toujours vérifier sa solution en la réinjectant dans l'équation*

— *La solution d'équilibre de* $y' = ay + b$ *est* $y_0 = -\dfrac{b}{a}$

— *Si* $a < 0$ *: convergence vers la solution d'équilibre*

— *Si* $a > 0$ *: divergence (sauf si on part de la solution d'équilibre)*