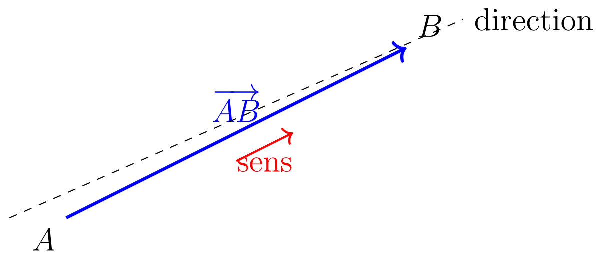
1 Vecteurs dans le plan

1.1 Définition et notation

Définition 1. *Un **vecteur** est caractérisé par :*

- *Une **direction** (droite support)*
- *Un **sens** (orientation sur cette droite)*
- *Une **norme** ou longueur (distance)*

Le vecteur qui va du point A au point B se note $\overrightarrow{AB}$.
On note aussi les vecteurs avec une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{u}$, $\vec{v}$, etc.



Remarque 1.
- *L'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est A*
- *L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est B*
- *$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ (sens opposés)*

1.2 Vecteur nul

Définition 2. *Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues.*
Pour tout point A : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
Le vecteur nul a une norme nulle et n'a pas de direction définie.

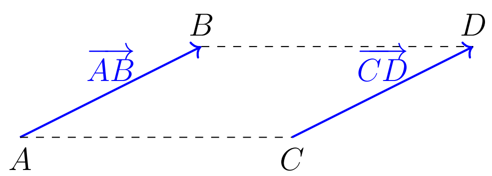
1.3 Égalité de vecteurs

Définition 3. *Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** s'ils ont :*

- *La même direction*
- *Le même sens*
- *La même norme*

On note : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Propriété 1. *$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).*



1.4 Norme d'un vecteur

Définition 4. *La **norme** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ ou AB, est la longueur du segment $[AB]$. C'est un nombre positif ou nul.*

Propriété 2. *Dans un repère orthonormé, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple 1. *Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$ avec $A(1; 2)$ et $B(4; 6)$.*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

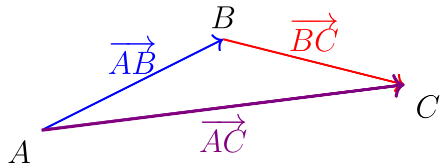
2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Addition de vecteurs

Définition 5 (Relation de Chasles). *Pour tous points A, B et C :*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette relation permet d'additionner des vecteurs « bout à bout ».



Propriété 3 (Règle du parallélogramme). *Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors :*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Exemple 2. *Simplifier :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

2.2 Vecteur opposé

Définition 6. *Le **vecteur opposé** de $\overrightarrow{AB}$, noté $-\overrightarrow{AB}$, est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.*
Il a :

- *La même direction que* $\overrightarrow{AB}$
- *Le sens opposé à* $\overrightarrow{AB}$
- *La même norme que* $\overrightarrow{AB}$

Propriété 4.
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
- $\|\overrightarrow{AB}\| = \|-\overrightarrow{AB}\|$

2.3 Soustraction de vecteurs

Définition 7. *La **différence** de deux vecteurs est définie par :*

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$$

Propriété 5. *Pour tous points A, B et C :*

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

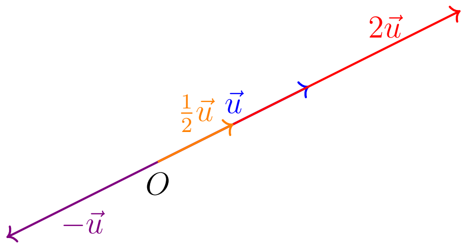
Exemple 3. *Simplifier :* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
Si on cherche à faire apparaître une relation de Chasles, on peut écrire :
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ *(si besoin)*

2.4 Multiplication par un réel

Définition 8. *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel.*
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur :

- *De même direction que $\vec{u}$*
- *De sens identique si $k > 0$, opposé si $k < 0$*
- *De norme $|k| \times \|\vec{u}\|$*

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.



Propriété 6. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et tous réels k et k' :*

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $1 \times \vec{u} = \vec{u}$
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

3 Colinéarité

3.1 Définition

Définition 9. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que :*

$$\vec{v} = k\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = k\vec{v}$$

Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

Remarque 2.
- *Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs*
- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens : $k > 0$*
- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés : $k < 0$*

3.2 Critère de colinéarité avec les coordonnées

Propriété 7. *Dans un repère, deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *sont colinéaires si et seulement si :*

$$xy' - x'y = 0$$

Cette expression s'appelle le ***déterminant*** *des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Méthode 1 (Vérifier la colinéarité). *Pour vérifier si* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *sont colinéaires :*

1. *Calculer* $xy' - x'y$
2. *Si* $xy' - x'y = 0$ *: les vecteurs sont colinéaires*
3. *Si* $xy' - x'y \neq 0$ *: les vecteurs ne sont pas colinéaires*

Exemple 4. ***1)*** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ *sont-ils colinéaires ?*
$2 \times 6 - 4 \times 3 = 12 - 12 = 0$
Oui, ils sont colinéaires. En effet : $\vec{v} = 2\vec{u}$
2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ *sont-ils colinéaires ?*
$1 \times 5 - 3 \times 2 = 5 - 6 = -1 \neq 0$
Non, ils ne sont pas colinéaires.
3) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ *sont-ils colinéaires ?*
$(-3) \times (-4) - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$
Oui, ils sont colinéaires. En effet : $\vec{v} = -2\vec{u}$

3.3 Applications de la colinéarité

Propriété 8 (Points alignés). *Trois points* A, B *et* C *sont alignés si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

Propriété 9 (Droites parallèles). *Deux droites* (AB) *et* (CD) *sont parallèles si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*

Exemple 5. *Les points* $A(1;2)$, $B(3;5)$ *et* $C(5;8)$ *sont-ils alignés ?*
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-1\\8-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$
Déterminant : $2 \times 6 - 4 \times 3 = 12 - 12 = 0$
Les vecteurs sont colinéaires, donc les points sont alignés.

4 Repérage dans le plan

4.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 10. *Dans un repère* $(O;\vec{i},\vec{j})$, *tout vecteur* $\vec{u}$ *peut s'écrire de manière unique :*

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Les nombres x *et* y *sont les* ***coordonnées*** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans le repère.*
On note : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *ou* $\vec{u}(x;y)$

Propriété 10. *Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points du repère, alors :*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Exemple 6. *Dans un repère, $A(1;3)$ et $B(4;7)$.*
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

4.2 Opérations avec les coordonnées

Propriété 11. *Dans un repère, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$:*

Addition :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire :

$$k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Norme :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple 7. *Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.*

1) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) $3\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

3) $2\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

4.3 Coordonnées du milieu

Propriété 12. *Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :*

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exemple 8. *Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ avec $A(2;5)$ et $B(6;1)$.*
$I\left(\frac{2+6}{2}; \frac{5+1}{2}\right) = I(4;3)$

5 Vecteurs dans l'espace

5.1 Repérage dans l'espace

Définition 11. *Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique :*

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Propriété 13. *Si* $A(x_A; y_A; z_A)$ *et* $B(x_B; y_B; z_B)$*, alors :*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

5.2 Opérations dans l'espace

Propriété 14. *Dans un repère de l'espace, si* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *et* $k \in \mathbb{R}$ *:*

Addition :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire :

$$k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

Norme :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Colinéarité : $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\vec{u}$

Exemple 9. *Dans l'espace,* $A(1; 2; -1)$ *et* $B(4; 0; 3)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$

6 Produit scalaire

6.1 Définition

Définition 12. *Le* ***produit scalaire*** *de deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est le nombre réel noté* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *défini par :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

où $(\vec{u}, \vec{v})$ *est l'angle entre les deux vecteurs.*

Remarque 3.
— *Si* $\vec{u} = \vec{0}$ *ou* $\vec{v} = \vec{0}$*, alors* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
— $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

6.2 Calcul avec les coordonnées

Propriété 15. *Dans un repère orthonormé, si* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *(plan) :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Dans l'espace, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exemple 10. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-1)+3\times 4 = -2+12 = 10$

6.3 Propriétés du produit scalaire

Propriété 16. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :*

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ *(commutativité)*
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ *(distributivité)*
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

6.4 Orthogonalité

Définition 13. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* ***orthogonaux*** (perpendiculaires) *si et seulement si :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

On note : $\vec{u}\perp\vec{v}$

Exemple 11. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 2+2\times(-3) = 6-6 = 0$
Les vecteurs sont orthogonaux.

7 Applications

7.1 Exercices sur les vecteurs du plan

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Simplifier l'expression vectorielle suivante :*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$$

Solution :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}$ *(relation de Chasles)*
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AD}$

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Dans un parallélogramme $ABCD$, exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.*
Solution :
Par la règle du parallélogramme :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

7.2 Exercices avec coordonnées

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Soit* $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Calculer :

a) $\vec{u}+\vec{v}$

$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}4+1\\-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

b) $3\vec{u}-2\vec{v}$

$3\vec{u}-2\vec{v}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-12\end{pmatrix}$

c) $\|\vec{u}\|$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

d) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=4\times 1+(-2)\times 3=4-6=-2$

7.3 Exercices de géométrie

Application 4. ***Exercice 4 :*** *Les points* $A(1;2)$, $B(3;-1)$, $C(7;-7)$ *et* $D(5;-4)$ *forment-ils un parallélogramme ?*

Solution :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-7\\-4-(-7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$

Donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

8 Tableaux récapitulatifs

8.1 Opérations vectorielles

Opération	Géométrie	Coordonnées
Addition	Relation de Chasles	$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
Multiplication	$k\vec{u}$ même direction	$\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
Norme	Longueur	$\sqrt{x^2 + y^2}$
Colinéarité	Même direction	$xy' - x'y = 0$
Produit scalaire	$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$	$xx' + yy'$
Orthogonalité	$\vec{u} \perp \vec{v}$	$xx' + yy' = 0$

8.2 Formules essentielles

Relation de Chasles	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Vecteur opposé	$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$	$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
Milieu de $[AB]$	$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
Distance AB	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Colinéarité	$xy' - x'y = 0$