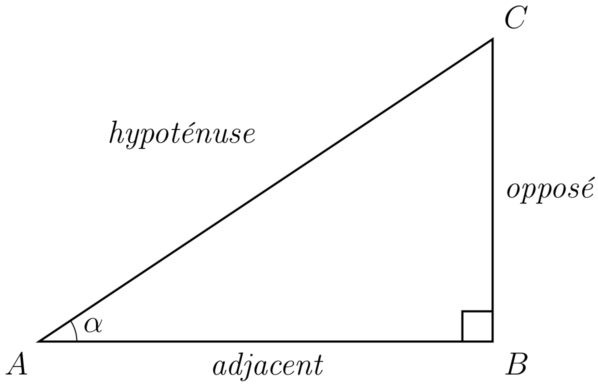
1 Trigonométrie dans le triangle rectangle

1.1 Rappels de 4ème-3ème

Définition 1. *Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu $\widehat{A}$:*



- $\cos(\alpha) = \dfrac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$
- $\sin(\alpha) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AB}$

Propriété 1 (Relation fondamentale)**.** *Pour tout angle aigu α :*

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Propriété 2 (Relation entre tangente, sinus et cosinus)**.** *Pour tout angle aigu α (avec $\cos(\alpha) \neq 0$) :*

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

1.2 Valeurs remarquables

Angle	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Remarque 1. *Moyen mnémotechnique pour retenir les valeurs :*

Pour le sinus et le cosinus de $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$:

sin : $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$

cos *: dans l'ordre inverse*

2 Cercle trigonométrique et radian

2.1 Le radian

Définition 2. *Le* ***radian*** *(noté rad) est une unité de mesure d'angle.*

On dit qu'un angle mesure 1 radian lorsque l'arc du cercle trigonométrique intercepté par cet angle mesure 1 unité de longueur.

Conversion :

$$180° = \pi \ rad$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \ rad \quad et \quad 1 \ rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$$

Exemple 1. ***Conversions degrés → radians :***

— $30° = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \ rad$

— $45° = \frac{\pi}{4} \ rad$

— $60° = \frac{\pi}{3} \ rad$

— $90° = \frac{\pi}{2} \ rad$

— $360° = 2\pi \ rad$

Conversions radians → degrés :

— $\frac{\pi}{3} \ rad = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60°$

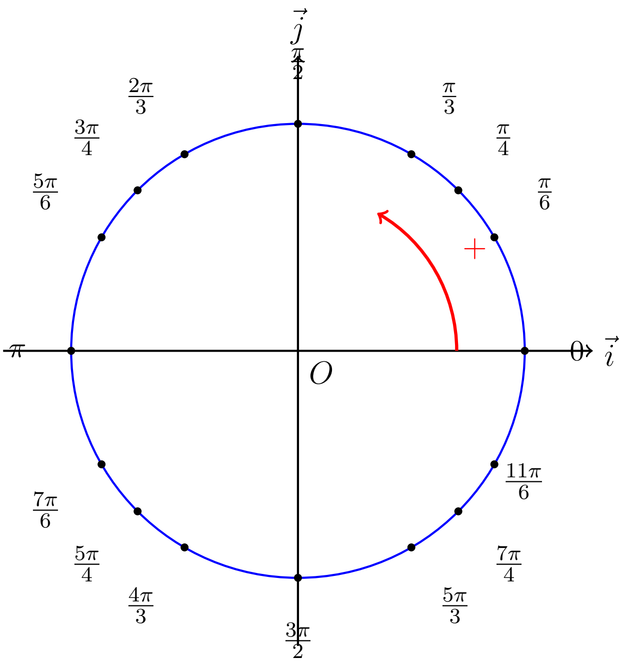
— $\frac{5\pi}{6} \ rad = 150°$

— $\pi \ rad = 180°$

2.2 Cercle trigonométrique

Définition 3. *Le* ***cercle trigonométrique*** *est le cercle de centre O et de rayon 1, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.*

Le sens direct (ou sens trigonométrique) est le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens positif).



2.3 Enroulement de la droite réelle

Définition 4. *À tout nombre réel x, on associe un unique point M du cercle trigonométrique obtenu en « enroulant » la droite réelle autour du cercle.*

Si $x \geq 0$: on parcourt le cercle dans le sens direct sur une longueur x.

Si $x < 0$: on parcourt le cercle dans le sens indirect sur une longueur $|x|$.

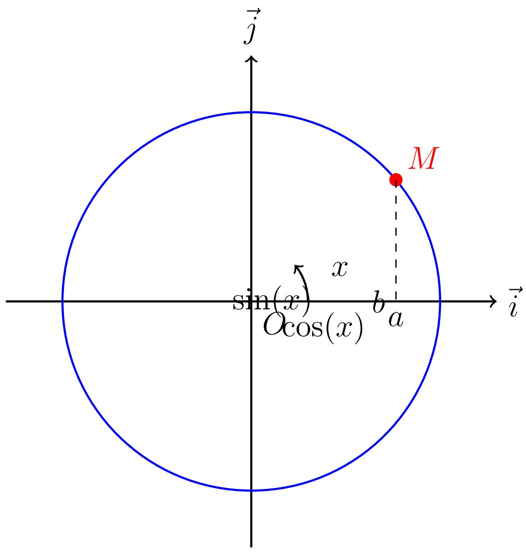
Remarque 2.
- *Un tour complet correspond à 2π radians*
- *Les points correspondant à x et $x + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) sont confondus*
- *On dit que les fonctions trigonométriques sont **périodiques de période** 2π*

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Définitions pour tout réel

Définition 5. *Pour tout réel x, soit M le point du cercle trigonométrique associé à x.*

Si M a pour coordonnées $(a; b)$, alors :
- $\cos(x) = a$ *(abscisse de M)*
- $\sin(x) = b$ *(ordonnée de M)*
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *si* $\cos(x) \neq 0$ *(soit $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)*



3.2 Propriétés fondamentales

Propriété 3. *Pour tout réel x :*
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Propriété 4 (Périodicité)**.** *Pour tout réel x et tout entier k :*
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
- $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$ *(période π pour la tangente)*

3.3 Parité

Propriété 5. *Pour tout réel x :*

- $\cos(-x) = \cos(x)$ *(fonction **paire**)*
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ *(fonction **impaire**)*
- $\tan(-x) = -\tan(x)$ *(fonction **impaire**)*

3.4 Valeurs particulières étendues

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

4 Formules de trigonométrie

4.1 Angles associés

Propriété 6 (Angles opposés)**.** *Pour tout réel x :*

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$

Propriété 7 (Angles supplémentaires)**.** *Pour tout réel x :*

- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Propriété 8 (Angles complémentaires)**.** *Pour tout réel x :*

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Propriété 9 (Translation de π)**.** *Pour tout réel x :*

- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

Propriété 10 (Translation de $\frac{\pi}{2}$)**.** *Pour tout réel x :*

- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

4.2 Formules d'addition

Propriété 11. *Pour tous réels a et b :*

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

4.3 Formules de duplication

Propriété 12. *Pour tout réel x :*
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

4.4 Formules de linéarisation

Propriété 13. *Pour tout réel x :*
- $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

5 Équations trigonométriques

5.1 Équations simples

Propriété 14. *Pour résoudre $\cos(x) = a$ avec $-1 \leq a \leq 1$:*
Il existe un unique $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$.
Les solutions sont : $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

Propriété 15. *Pour résoudre $\sin(x) = a$ avec $-1 \leq a \leq 1$:*
Il existe un unique $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\alpha) = a$.
Les solutions sont : $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

Exemple 2. *1) Résoudre $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$*

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Solutions : $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{3}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

2) Résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solutions : $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

3) Résoudre $\cos(x) = -1$ sur $[0; 2\pi]$

$\cos(\pi) = -1$

Solution : $x = \pi$

$S = \{\pi\}$

5.2 Équations du type $\cos(x) = \cos(a)$

Propriété 16. $\cos(x) = \cos(a) \iff x = a + 2k\pi$ *ou* $x = -a + 2k\pi$, *où* $k \in \mathbb{Z}$

Exemple 3. *Résoudre* $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ *sur* $[0; 2\pi]$

$x = \frac{\pi}{6}$ *ou* $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

5.3 Équations du type $\sin(x) = \sin(a)$

Propriété 17. $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - a + 2k\pi$, *où* $k \in \mathbb{Z}$

Exemple 4. *Résoudre* $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *sur* $[0; 2\pi]$

$x = \frac{\pi}{4}$ *ou* $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

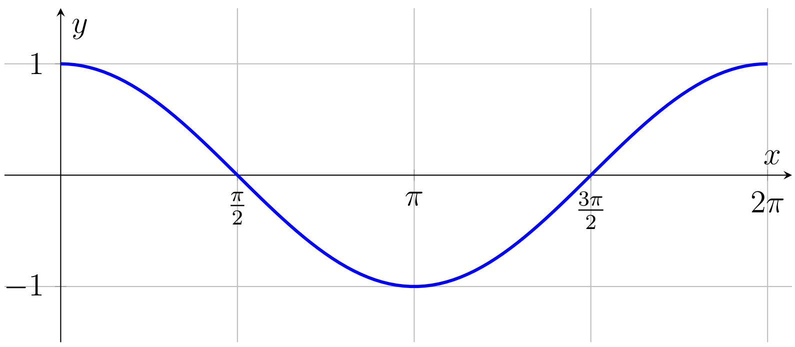
$S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

6 Fonctions trigonométriques

6.1 Fonction cosinus

Propriété 18. *La fonction* $f(x) = \cos(x)$ *:*

- *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$
- *Ensemble image :* $[-1; 1]$
- *Périodicité :* 2π
- *Parité : paire*
- *Variations sur* $[0; 2\pi]$ *: décroissante sur* $[0; \pi]$, *croissante sur* $[\pi; 2\pi]$

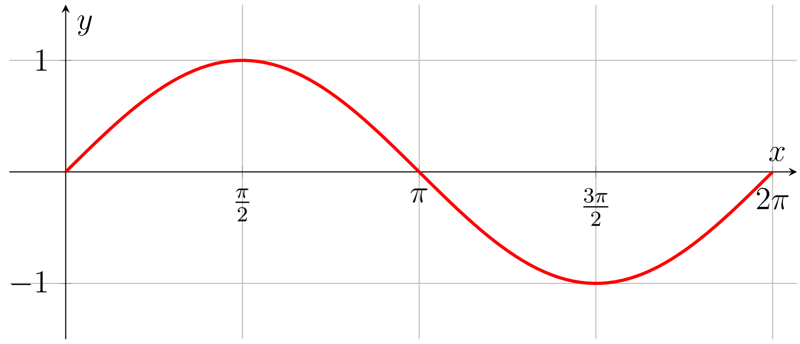


6.2 Fonction sinus

Propriété 19. *La fonction* $f(x) = \sin(x)$ *:*

- *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$
- *Ensemble image :* $[-1; 1]$
- *Périodicité :* 2π
- *Parité : impaire*

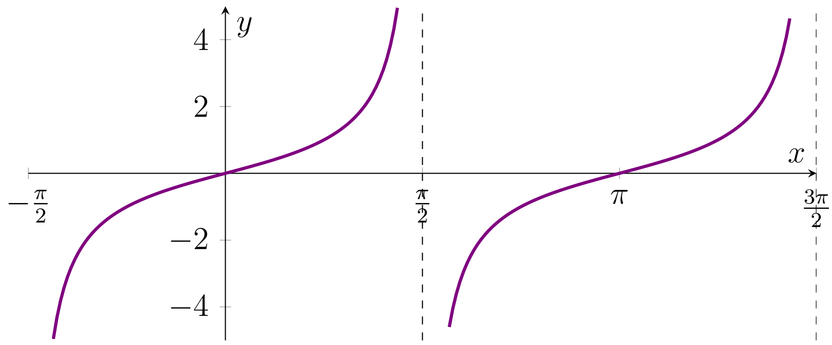
— *Variations sur* $[0; 2\pi]$ *: croissante sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$*, décroissante sur* $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$*, croissante sur* $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$



6.3 Fonction tangente

Propriété 20. *La fonction* $f(x) = \tan(x)$ *:*

- *Ensemble de définition :* $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- *Ensemble image :* $\mathbb{R}$
- *Périodicité :* π
- *Parité : impaire*
- *Strictement croissante sur chaque intervalle de définition*
- *Asymptotes verticales :* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



7 Applications

7.1 Calculs trigonométriques

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Sachant que* $\cos(x) = \frac{3}{5}$ *avec* $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$*, calculer* $\sin(x)$ *et* $\tan(x)$*.*

Solution :

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

Comme $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) > 0$

$\sin(x) = \frac{4}{5}$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$

7.2 Équations trigonométriques

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Résoudre* $2\cos(x) - 1 = 0$ *sur* $[0; 2\pi]$.

Solution :

$2\cos(x) - 1 = 0$

$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Solutions : $x = \dfrac{\pi}{3}$ *ou* $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{3}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Résoudre* $\sin^2(x) = \dfrac{3}{4}$ *sur* $[0; 2\pi]$.

Solution :

$\sin^2(x) = \dfrac{3}{4}$

$\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *ou* $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Pour $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *:* $x = \dfrac{\pi}{3}$ *ou* $x = \dfrac{2\pi}{3}$

Pour $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *:* $x = \dfrac{4\pi}{3}$ *ou* $x = \dfrac{5\pi}{3}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

7.3 Formules trigonométriques

Application 4. ***Exercice 4 :*** *Calculer* $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ *en utilisant les formules d'addition.*

Solution :

$\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

8 Tableaux récapitulatifs

8.1 Formules essentielles

Relation fondamentale	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
Tangente	$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Périodicité	$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
Parité	$\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

8.2 Angles associés

Relation	cos	sin
$-x$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\pi - x$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$x + \pi$	$-\cos(x)$	$-\sin(x)$
$x + \frac{\pi}{2}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

8.3 Formules d'addition et duplication

Formule	**Expression**
$\cos(a + b)$	$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a - b)$	$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a + b)$	$\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\sin(a - b)$	$\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$\cos(2x)$	$\cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
$\sin(2x)$	$2\sin(x)\cos(x)$