1 Généralités sur les suites

1.1 Définition d'une suite

Définition 1. *Une **suite numérique** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

On note (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, où u_n représente le terme de rang n.

Exemple 1.
- *(u_n) définie par $u_n = 2n+1$: $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, ...*
- *(v_n) définie par $v_n = 3^n$: $v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 9$, $v_3 = 27$, ...*

1.2 Modes de définition

Définition 2 (Forme explicite)**.** *La suite (u_n) est définie par une **formule explicite** si on peut calculer directement u_n en fonction de n.*

Exemple : $u_n = 3n - 5$

Définition 3 (Forme par récurrence)**.** *La suite (u_n) est définie par **récurrence** si on donne :*
- *Le premier terme u_0 (ou u_1)*
- *Une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$*

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1.3 Sens de variation

Définition 4. *Une suite (u_n) est :*
- ***Croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq u_n$*
- ***Strictement croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$*
- ***Décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n$*
- ***Strictement décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} < u_n$*
- ***Constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n$*

Méthode 1 (Étudier le sens de variation)**.** *Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) :*
1. *Calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe*
2. *Ou calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (si $u_n > 0$) et comparer à 1*
3. *Ou étudier la fonction f telle que $u_n = f(n)$*

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition et propriétés

Définition 5. *Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r, appelé **raison**, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

*Autrement dit : on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r.*

Exemple 2. *1) La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ est arithmétique de raison $r = 5$.*
Les premiers termes sont : $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$
2) La suite (v_n) définie par $v_n = 2n - 1$ est arithmétique de raison $r = 2$.
Les premiers termes sont : $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$
3) La suite constante (w_n) avec $w_n = 7$ est arithmétique de raison $r = 0$.

2.2 Terme général

Propriété 1 (Expression du terme général). *Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :*

$$u_n = u_0 + nr$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple 3. *La suite (u_n) est arithmétique avec $u_0 = 7$ et $r = -3$.*

Calculer u_{10} et u_{50}.

Solution :

$u_{10} = u_0 + 10r = 7 + 10 \times (-3) = 7 - 30 = -23$

$u_{50} = u_0 + 50r = 7 + 50 \times (-3) = 7 - 150 = -143$

2.3 Sens de variation

Propriété 2. *Une suite arithmétique de raison r est :*

- ***Strictement croissante*** *si* $r > 0$
- ***Constante*** *si* $r = 0$
- ***Strictement décroissante*** *si* $r < 0$

2.4 Somme des termes

Propriété 3 (Somme des n premiers termes). *Pour une suite arithmétique (u_n) :*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Autrement dit : ***(nombre de termes)*** $\times$ ***(moyenne du premier et du dernier terme)***

Remarque 1. *Si la suite commence à u_1 :*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

Exemple 4. ***1)*** *Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$*

C'est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$, de dernier terme $u_{100} = 100$, avec 100 termes.

$S = 100 \times \dfrac{1+100}{2} = 100 \times \dfrac{101}{2} = 5050$

2) *Calculer $S = 5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + 65$*

Suite arithmétique de raison $r = 3$, $u_1 = 5$, $u_n = 65$.

D'abord, trouver n : $u_n = u_1 + (n-1)r$, donc $65 = 5 + (n-1) \times 3$

$60 = 3(n-1)$*, donc* $n - 1 = 20$*, d'où* $n = 21$

$S = 21 \times \dfrac{5+65}{2} = 21 \times 35 = 735$

2.5 Formule pratique

Propriété 4 (Somme des n premiers entiers).

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3 Suites géométriques

3.1 Définition et propriétés

Définition 6. *Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q non nul, appelé **raison**, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

*Autrement dit : on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q.*

Exemple 5. ***1)*** *La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$ est géométrique de raison $q = 3$.*
Les premiers termes sont : $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
2) *La suite (v_n) définie par $v_n = 5 \times 2^n$ est géométrique de raison $q = 2$.*
Les premiers termes sont : $5, 10, 20, 40, 80, \ldots$
3) *La suite (w_n) définie par $w_0 = 100$ et $w_{n+1} = 0{,}5w_n$ est géométrique de raison $q = 0{,}5$.*
Les premiers termes sont : $100, 50, 25, 12{,}5, 6{,}25, \ldots$

3.2 Terme général

Propriété 5 (Expression du terme général)**.** *Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$, alors :*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 6. *La suite (u_n) est géométrique avec $u_0 = 3$ et $q = 2$.*
Calculer u_5 et u_{10}.
Solution :
$u_5 = u_0 \times q^5 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$
$u_{10} = u_0 \times q^{10} = 3 \times 2^{10} = 3 \times 1024 = 3072$

3.3 Sens de variation

Propriété 6. *Pour une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$:*

- *Si $q > 1$: la suite est **strictement croissante***
- *Si $q = 1$: la suite est **constante***
- *Si $0 < q < 1$: la suite est **strictement décroissante***

Remarque 2. *Si $q < 0$, la suite change de signe à chaque terme et n'est ni croissante ni décroissante.*

3.4 Somme des termes

Propriété 7 (Somme des n premiers termes)**.** *Pour une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$:*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque 3. *Si la suite commence à u_1 :*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemple 7. *1) Calculer* $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$
Suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$*, de raison* $q = 2$*, avec 7 termes (de* $n = 0$ *à* $n = 6$*).*
$S = 1 \times \dfrac{1 - 2^7}{1 - 2} = \dfrac{1 - 128}{-1} = \dfrac{-127}{-1} = 127$
2) Calculer $S = 3 + 6 + 12 + 24 + \dots$ *(10 termes)*
Suite géométrique de premier terme $u_1 = 3$*, de raison* $q = 2$*, avec 10 termes.*
$S = 3 \times \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times \dfrac{1 - 1024}{-1} = 3 \times 1023 = 3069$

3.5 Formule pratique

Propriété 8 (Somme des puissances de q)**.** *Pour* $q \neq 1$ *:*

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

4 Suites arithmético-géométriques

4.1 Définition

Définition 7. *Une suite* (u_n) *est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres réels* a *et* b *avec* $a \neq 0$*,* $a \neq 1$ *et* $b \neq 0$*, tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_{n+1} = au_n + b$$

C'est une suite définie par récurrence linéaire d'ordre 1.

Exemple 8. *Les suites suivantes sont arithmético-géométriques :*
1) $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 2u_n + 3$ *(avec* $a = 2$*,* $b = 3$*)*
Les premiers termes : $1, 5, 13, 29, 61, \dots$
2) $v_0 = 10$ *et* $v_{n+1} = 0{,}5v_n + 4$ *(avec* $a = 0{,}5$*,* $b = 4$*)*
Les premiers termes : $10, 9, 8{,}5, 8{,}25, 8{,}125, \dots$

4.2 Point fixe et suite auxiliaire

Propriété 9 (Point fixe)**.** *Soit* (u_n) *une suite arithmético-géométrique définie par* $u_{n+1} = au_n + b$*.*
Le nombre ℓ *est appelé **point fixe** (ou limite) s'il vérifie :*

$$\ell = a\ell + b$$

On trouve : $\ell = \dfrac{b}{1 - a}$ *(avec* $a \neq 1$*)*

Théorème 1 (Suite auxiliaire)**.** *On pose* $v_n = u_n - \ell$ *où* ℓ *est le point fixe.*
Alors (v_n) *est une suite **géométrique** de raison* a *:*

$$v_{n+1} = av_n$$

D'où : $v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - \ell) \times a^n$
Et finalement :

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell) \times a^n$$

4.3 Méthode de résolution

Méthode 2 (Résoudre une suite arithmético-géométrique). *Pour trouver l'expression de u_n dans une suite $u_{n+1} = au_n + b$:*

1. *Calculer le point fixe :* $\ell = \dfrac{b}{1-a}$
2. *Poser* $v_n = u_n - \ell$
3. *Montrer que* (v_n) *est géométrique de raison* a
4. *Exprimer* $v_n = v_0 \times a^n$ *avec* $v_0 = u_0 - \ell$
5. *En déduire :* $u_n = v_n + \ell = \ell + (u_0 - \ell) \times a^n$

Exemple 9. *Soit* (u_n) *définie par* $u_0 = 5$ *et* $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Déterminer l'expression de u_n *en fonction de* n.

Solution :

Étape 1 : *Point fixe*

$\ell = \dfrac{-3}{1-2} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

Étape 2 : *Suite auxiliaire*

Posons $v_n = u_n - 3$

Étape 3 : *Montrons que* (v_n) *est géométrique*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= (2u_n - 3) - 3 \\ &= 2u_n - 6 \\ &= 2(u_n - 3) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) *est géométrique de raison* $q = 2$.

Étape 4 : *Expression de* v_n

$v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$

$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

Étape 5 : *Expression de* u_n

$u_n = v_n + 3 = 2^{n+1} + 3$

4.4 Sens de variation

Propriété 10. *Pour une suite arithmético-géométrique* $u_{n+1} = au_n + b$ *de point fixe* ℓ *:*

Si $u_0 > \ell$ ***:***

- *Si* $a > 1$ *:* (u_n) *est strictement croissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- *Si* $0 < a < 1$ *:* (u_n) *est strictement décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Si $u_0 < \ell$ ***:***

- *Si* $a > 1$ *:* (u_n) *est strictement décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- *Si* $0 < a < 1$ *:* (u_n) *est strictement croissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Si $u_0 = \ell$ ***:*** (u_n) *est constante égale à* ℓ

4.5 Limite

Propriété 11. *Pour une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$:*

- *Si $|a| < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = \dfrac{b}{1-a}$*
- *Si $a > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ selon u_0*
- *Si $a = -1$: la suite oscille entre deux valeurs*
- *Si $a < -1$: la suite diverge en oscillant*

Exemple 10. *Soit (u_n) définie par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 6$.*
1) *Déterminer l'expression de u_n.*
Point fixe : $\ell = \dfrac{6}{1-0{,}8} = \dfrac{6}{0{,}2} = 30$
Suite auxiliaire : $v_n = u_n - 30$
$v_n = v_0 \times 0{,}8^n = (20-30) \times 0{,}8^n = -10 \times 0{,}8^n$
Donc : $u_n = 30 - 10 \times 0{,}8^n$
2) *Sens de variation*
$u_{n+1} - u_n = [30 - 10 \times 0{,}8^{n+1}] - [30 - 10 \times 0{,}8^n] = -10 \times 0{,}8^n(0{,}8-1) = 2 \times 0{,}8^n > 0$
La suite est strictement croissante.
3) *Limite*
Comme $0 < 0{,}8 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$
Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 30$

4.6 Applications

Application 1. ***Problème de refroidissement :***
Un objet à 80°C est placé dans une pièce à 20°C. Chaque minute, sa température diminue de 10% de l'écart avec la température ambiante.
La température T_n après n minutes vérifie :

$$T_{n+1} = T_n - 0{,}1(T_n - 20) = 0{,}9T_n + 2$$

avec $T_0 = 80$.
Solution :
C'est une suite arithmético-géométrique avec $a = 0{,}9$ et $b = 2$.
Point fixe : $\ell = \dfrac{2}{1-0{,}9} = \dfrac{2}{0{,}1} = 20\,°C$ (température ambiante)
Suite auxiliaire : $v_n = T_n - 20$
$v_n = (80-20) \times 0{,}9^n = 60 \times 0{,}9^n$
Donc : $T_n = 20 + 60 \times 0{,}9^n$
À long terme : $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 20\,°C$

Application 2. ***Modèle économique :***
Une entreprise a un stock initial de 1000 unités. Chaque semaine, elle vend 40% de son stock et reçoit 300 unités.
Le stock S_n après n semaines vérifie :

$$S_{n+1} = 0{,}6S_n + 300$$

avec $S_0 = 1000$.
Solution :

Point fixe : $\ell = \dfrac{300}{1-0{,}6} = \dfrac{300}{0{,}4} = 750$
$v_n = S_n - 750$
$v_n = (1000 - 750) \times 0{,}6^n = 250 \times 0{,}6^n$
Donc : $S_n = 750 + 250 \times 0{,}6^n$
Le stock tend vers 750 unités à long terme.

5 Comparaison et reconnaissance

5.1 Comment reconnaître le type de suite ?

Méthode 3. *Pour déterminer le type de suite :*

Suite arithmétique :

- *Calculer* $u_{n+1} - u_n$ *: si c'est constant* $= r$*, la suite est arithmétique de raison* r
- *Ou vérifier si* $u_n = an + b$ *(forme affine)*

Suite géométrique :

- *Calculer* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *: si c'est constant* $= q$*, la suite est géométrique de raison* q
- *Ou vérifier si* $u_n = a \times q^n$ *(forme exponentielle)*

Suite arithmético-géométrique :

- *Si* $u_{n+1} = au_n + b$ *avec* $a \neq 0$*,* $a \neq 1$ *et* $b \neq 0$
- *Ni arithmétique ni géométrique mais combinaison des deux*

Exemple 11. *Déterminer la nature des suites suivantes :*

1) (u_n) *avec* $u_0 = 5$, $u_1 = 8$, $u_2 = 11$, $u_3 = 14$
$u_1 - u_0 = 3$, $u_2 - u_1 = 3$, $u_3 - u_2 = 3$
La suite est ***arithmétique de raison*** $r = 3$ *et* $u_n = 5 + 3n$
2) (v_n) *avec* $v_0 = 2$, $v_1 = 6$, $v_2 = 18$, $v_3 = 54$
$\dfrac{v_1}{v_0} = 3$, $\dfrac{v_2}{v_1} = 3$, $\dfrac{v_3}{v_2} = 3$
La suite est ***géométrique de raison*** $q = 3$ *et* $v_n = 2 \times 3^n$
3) (w_n) *définie par* $w_0 = 1$ *et* $w_{n+1} = 3w_n - 2$
La suite est ***arithmético-géométrique*** *avec* $a = 3$ *et* $b = -2$
Point fixe : $\ell = \dfrac{-2}{1-3} = 1$
$w_n = 1 + (1 - 1) \times 3^n = 1$ *(suite constante car* $w_0 = \ell$*)*

5.2 Tableau comparatif

	Arithmétique	**Géométrique**	**Arithmético-géom.**
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$	$u_{n+1} = au_n + b$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$	$u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$
Paramètre	$r = u_{n+1} - u_n$	$q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$	Point fixe $\ell = \dfrac{b}{1-a}$
Méthode	Directe	Directe	Suite auxiliaire

6 Limites de suites

6.1 Suite arithmétique

Propriété 12. *Pour une suite arithmétique* (u_n) *de raison* r *:*

— *Si* $r > 0$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

— *Si* $r < 0$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

— *Si* $r = 0$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ *(constante)*

6.2 Suite géométrique

Propriété 13. *Pour une suite géométrique* (u_n) *de premier terme* $u_0 > 0$ *et de raison* $q > 0$ *:*

— *Si* $q > 1$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

— *Si* $q = 1$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ *(constante)*

— *Si* $0 < q < 1$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

— *Si* $q = 0$ *:* $u_n = 0$ *pour tout* $n \geq 1$

— *Si* $-1 < q < 0$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

— *Si* $q \leq -1$ *: la limite n'existe pas*

6.3 Suite arithmético-géométrique

Propriété 14. *Pour une suite arithmético-géométrique* $u_{n+1} = au_n + b$ *:*

— *Si* $|a| < 1$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \dfrac{b}{1-a}$

— *Si* $a > 1$ *et* $u_0 > \ell$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

— *Si* $a > 1$ *et* $u_0 < \ell$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

— *Si* $a \leq -1$ *: la limite n'existe pas*

7 Tableaux récapitulatifs

7.1 Formules essentielles

Suites arithmétiques

Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$
Raison	$r = u_{n+1} - u_n$
Somme	$S_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$
Cas particulier	$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Relation de récurrence	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 \times q^n$
Raison	$q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
Somme	$S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Cas particulier	$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Suites arithmético-géométriques

Relation de récurrence	$u_{n+1} = au_n + b$
Point fixe	$\ell = \dfrac{b}{1 - a}$
Suite auxiliaire	$v_n = u_n - \ell$ (géométrique de raison a)
Terme général	$u_n = \ell + (u_0 - \ell) \times a^n$
Limite (si $\lvert a \rvert < 1$)	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$