1 Vocabulaire des probabilités

1.1 Expérience aléatoire et univers

Définition 1. *Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance, même si on connaît toutes les conditions de réalisation.*

*L'**univers**, noté Ω (oméga), est l'ensemble de tous les résultats possibles (ou issues) de l'expérience aléatoire.*

Exemple 1. ***1)*** *On lance un dé à 6 faces.*
Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2) *On lance une pièce de monnaie.*
Univers : $\Omega = \{Pile,\ Face\}$
3) *On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.*
Univers : ensemble des 52 cartes (trop long à écrire)

1.2 Événements

Définition 2. *Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers Ω. C'est un ensemble d'issues.*
On note généralement les événements par des lettres majuscules : A, B, C, etc.

Définition 3.
- *Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue*
- *L'**événement certain** est l'univers Ω (il se réalise toujours)*
- *L'**événement impossible** est l'ensemble vide $\emptyset$ (il ne se réalise jamais)*

Exemple 2. *On lance un dé à 6 faces.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
***Événement** A **:** « Obtenir un nombre pair »*
$A = \{2, 4, 6\}$
***Événement** B **:** « Obtenir un nombre supérieur à 4 »*
$B = \{5, 6\}$
***Événement élémentaire :** « Obtenir 3 »* $= \{3\}$
***Événement impossible :** « Obtenir 7 »* $= \emptyset$

1.3 Opérations sur les événements

Définition 4. *Soient A et B deux événements.*

***Réunion** : $A \cup B$ (« A ou B ») est l'événement qui se réalise si au moins l'un des deux événements se réalise.*

***Intersection** : $A \cap B$ (« A et B ») est l'événement qui se réalise si les deux événements se réalisent simultanément.*

***Événement contraire** : $\overline{A}$ (ou A^c) est l'événement qui se réalise si A ne se réalise pas.*

Définition 5. *Deux événements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.*

Exemple 3. *On lance un dé.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{2, 4, 6\}$ *(nombre pair)*
$B = \{5, 6\}$ *(nombre supérieur à 4)*
$C = \{1, 3, 5\}$ *(nombre impair)*
1) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ *(pair ou supérieur à 4)*
2) $A \cap B = \{6\}$ *(pair et supérieur à 4)*
3) $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ *(nombre impair)*
4) *A et C sont incompatibles car $A \cap C = \emptyset$*

2 Probabilités

2.1 Définition d'une probabilité

Définition 6. *Une* ***loi de probabilité*** *(ou probabilité) sur un univers fini* Ω *est une application* P *qui associe à chaque événement* A *un nombre réel* $P(A)$ *tel que :*

- $0 \leq P(A) \leq 1$ *pour tout événement* A
- $P(\Omega) = 1$ *(l'événement certain a une probabilité de 1)*
- *Si* A *et* B *sont incompatibles, alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Remarque 1.
- $P(A)$ *se lit « probabilité de* A *»*
- $P(A)$ *est un nombre entre 0 et 1 (ou un pourcentage entre 0% et 100%)*
- *Plus* $P(A)$ *est proche de 1, plus l'événement* A *est probable*
- $P(\emptyset) = 0$ *(l'événement impossible a une probabilité nulle)*

2.2 Équiprobabilité

Définition 7. *On dit qu'il y a* ***équiprobabilité*** *(ou que les issues sont équiprobables) si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Dans ce cas, pour un événement A *:*

$$P(A) = \frac{\textit{nombre d'issues favorables à } A}{\textit{nombre total d'issues}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Exemple 4. *On lance un dé équilibré.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Il y a équiprobabilité : chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$.

$A = \{2, 4, 6\}$ *(nombre pair)*

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

2.3 Propriétés des probabilités

Propriété 1. *Pour tous événements* A *et* B *:*

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- *Si* A *et* B *sont incompatibles :* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- *Si* $A \subset B$ *:* $P(A) \leq P(B)$

Exemple 5. *On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.*

A *: « tirer un cœur »* $\to P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$\overline{A}$ *: « ne pas tirer un cœur »* $\to P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

B *: « tirer un as »* $\to P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$A \cap B$ *: « tirer l'as de cœur »* $\to P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

3 Variables aléatoires

3.1 Définition

Définition 8. *Une **variable aléatoire** est une fonction qui associe à chaque issue de l'univers un nombre réel.*

On note généralement les variables aléatoires par des lettres majuscules : X, Y, etc.

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

Exemple 6. *On lance deux dés et on note X la somme des deux faces.*

X peut prendre les valeurs : $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

3.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 9. *La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la donnée de toutes les probabilités $P(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i prises par X.*

On la présente souvent sous forme de tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

avec $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

Exemple 7. *On lance une pièce trois fois. Soit X le nombre de Pile obtenus.*

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Vérification : $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

3.3 Espérance mathématique

Définition 10. *L'**espérance mathématique** (ou espérance) d'une variable aléatoire X est le nombre :*

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$$

L'espérance représente la valeur moyenne que prendrait X si on répétait l'expérience un très grand nombre de fois.

Exemple 8. *Pour l'exemple précédent :*

$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8}$

$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$

En moyenne, on obtient 1,5 fois Pile (sur 3 lancers).

3.4 Variance et écart-type

Définition 11. *La* ***variance*** *d'une variable aléatoire X est :*

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 \times p_i$$

ou bien (formule de Koenig) :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

*L'****écart-type*** *est :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque 2.
- *La variance mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance*
- *Plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées*
- *L'écart-type a la même unité que X*

Exemple 9. *Pour notre exemple :*
$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8}$
$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3$
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1{,}5^2 = 3 - 2{,}25 = 0{,}75$
$\sigma(X) = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}866$

4 Probabilités conditionnelles

4.1 Définition

Définition 12. *Soient A et B deux événements avec $P(B) > 0$.*
La ***probabilité conditionnelle*** *de A sachant B, notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, est :*

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est la probabilité que A se réalise sachant que B est réalisé.

Exemple 10. *On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.*
A : « tirer un as »
B : « tirer un cœur »
$P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ *(as de cœur)*
Probabilité de tirer un as sachant qu'on a tiré un cœur :
$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$
C'est logique : parmi les 13 cœurs, il y a 1 as.

4.2 Formule des probabilités composées

Propriété 2. *Pour deux événements A et B avec $P(B) > 0$:*

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Plus généralement, pour n événements :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots$$

Exemple 11. *Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire deux boules successivement sans remise.*

Probabilité de tirer deux boules rouges :
R_1 *: « la 1ère boule est rouge »*
R_2 *: « la 2ème boule est rouge »*
$P(R_1) = \frac{3}{5}$
$P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *(il reste 2 rouges sur 4 boules)*
$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

4.3 Indépendance

Définition 13. *Deux événements A et B sont **indépendants** si :*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ou de manière équivalente (si $P(B) > 0$) :

$$P_B(A) = P(A)$$

L'occurrence de B n'influence pas la probabilité de A.

Exemple 12. *On lance deux dés.*
A : « le premier dé donne 6 »
B : « le deuxième dé donne 6 »
$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ *(une seule issue sur 36)*
$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
Donc A et B sont indépendants.

5 Arbres de probabilités

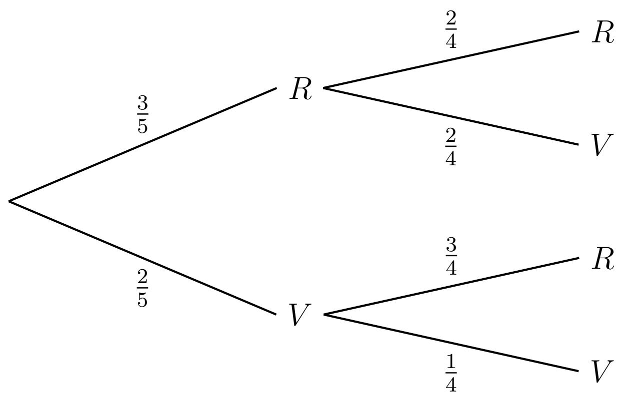
5.1 Construction d'un arbre

Méthode 1. *Un arbre de probabilités permet de représenter visuellement une expérience aléatoire à plusieurs étapes.*

Règles :

1. *Chaque branche représente une issue possible*
2. *On note sur chaque branche la probabilité correspondante*
3. *La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1*
4. *Pour obtenir la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités le long du chemin*

Exemple 13. *Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire deux boules successivement sans remise.*



$P(R \cap R) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
$P(R \cap V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
$P(V \cap R) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
$P(V \cap V) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$
Vérification : $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1$

5.2 Formule des probabilités totales

Propriété 3 (Formule des probabilités totales)**.** *Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω (événements incompatibles deux à deux dont la réunion est Ω), alors pour tout événement A :*

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + P(B_2) \times P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n) \times P_{B_n}(A)$$

Exemple 14. *Une usine a deux machines M_1 et M_2.*
M_1 produit 60% des pièces, dont 5% sont défectueuses.
M_2 produit 40% des pièces, dont 8% sont défectueuses.
Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ?
Soit D : « la pièce est défectueuse »
$P(D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D)$
$= 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}08$
$= 0{,}03 + 0{,}032 = 0{,}062 = 6{,}2\%$

5.3 Formule de Bayes

Propriété 4 (Formule de Bayes)**.** *Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$:*

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}$$

Exemple 15. *Reprenant l'exemple précédent, si une pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de M_1 ?*
$P_D(M_1) = \frac{P(M_1) \times P_{M_1}(D)}{P(D)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}05}{0{,}062} = \frac{0{,}03}{0{,}062} \approx 0{,}484 = 48{,}4\%$

6 Applications

6.1 Jeux de hasard

Application 1. ***Exercice 1 :*** *On lance deux dés équilibrés. Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 7.*

Solution :

Univers : 36 issues (6 × 6)

Issues favorables : $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$ $\rightarrow$ *6 issues*

$P(somme = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$

6.2 Urnes

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire 2 boules successivement sans remise.*

a) *Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches ?*

$P(B_1 \cap B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

b) *Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de couleurs différentes ?*

$P(différentes) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$

$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$

$= \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

6.3 Tests médicaux

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Un test de dépistage d'une maladie a les caractéristiques suivantes :*

- *Si une personne est malade, le test est positif dans 98% des cas*
- *Si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 2% des cas (faux positifs)*

On sait que 0,5% de la population est malade.

a) *Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard ait un test positif ?*

M : « la personne est malade »

T : « le test est positif »

$P(M) = 0{,}005,\ P(\overline{M}) = 0{,}995$

$P_M(T) = 0{,}98,\ P_{\overline{M}}(T) = 0{,}02$

$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$

$= 0{,}005 \times 0{,}98 + 0{,}995 \times 0{,}02$

$= 0{,}0049 + 0{,}0199 = 0{,}0248 = 2{,}48\%$

b) *Si le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?*

$P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)} = \frac{0{,}005 \times 0{,}98}{0{,}0248} = \frac{0{,}0049}{0{,}0248} \approx 0{,}198 = 19{,}8\%$

Seulement 19,8% ! Cela montre l'importance des faux positifs.

7 Tableaux récapitulatifs

7.1 Formules essentielles

Probabilité contraire	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Événements incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Formule générale	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Équiprobabilité	$P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$
Espérance	$E(X) = \sum x_i \times p_i$
Variance	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
Probabilité conditionnelle	$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Probabilités composées	$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Probabilités totales	$P(A) = \sum P(B_i) \times P_{B_i}(A)$

7.2 Méthodes de résolution

Situation	**Méthode**
Issues équiprobables	Dénombrement
Expérience à plusieurs étapes	Arbre de probabilités
« Sachant que... »	Probabilité conditionnelle
Tirages sans remise	Arbre + probabilités qui changent
Tirages avec remise	Indépendance
Calculer $P(A)$ avec partition	Formule des probabilités totales
Calculer $P_A(B)$ connaissant $P_B(A)$	Formule de Bayes