1 Les nombres premiers

1.1 Diviseurs d'un nombre

Définition 1. *Soit a et b deux nombres entiers naturels.*
*On dit que a **divise** b (ou que b est **divisible** par a) s'il existe un entier k tel que :*

$$b = a \times k$$

On note : $a \mid b$ (se lit « a divise b »)
*a est alors un **diviseur** de b, et b est un **multiple** de a.*

Exemple 1. ***1)*** *3 divise 12 car $12 = 3 \times 4$*
Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12
2) *5 ne divise pas 17 car il n'existe pas d'entier k tel que $17 = 5 \times k$*
3) *Diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24*

Remarque 1.
- *1 divise tous les nombres*
- *Tout nombre est divisible par 1 et par lui-même*
- *0 est divisible par tous les nombres (sauf 0)*

1.2 Définition d'un nombre premier

Définition 2. *Un nombre entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.*
*Un nombre qui n'est pas premier (et différent de 1) est appelé **nombre composé**.*

Exemple 2. ***Nombres premiers :***
- *2 : diviseurs = {1, 2} → premier*
- *3 : diviseurs = {1, 3} → premier*
- *5 : diviseurs = {1, 5} → premier*
- *7 : diviseurs = {1, 7} → premier*
- *11 : diviseurs = {1, 11} → premier*

Nombres composés :
- *4 : diviseurs = {1, 2, 4} → composé ($4 = 2 \times 2$)*
- *6 : diviseurs = {1, 2, 3, 6} → composé ($6 = 2 \times 3$)*
- *9 : diviseurs = {1, 3, 9} → composé ($9 = 3 \times 3$)*

Cas particuliers :
- *1 n'est **pas premier** (il n'a qu'un seul diviseur)*
- *0 n'est **pas premier***

1.3 Liste des nombres premiers

Propriété 1. *Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :*

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97					

Il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100.

Remarque 2.
- *2 est le seul nombre premier pair*
- *Il existe une infinité de nombres premiers (démontré par Euclide)*
- *Les nombres premiers deviennent de plus en plus rares quand on avance dans les entiers*

1.4 Reconnaître un nombre premier

Méthode 1 (Tester si un nombre est premier). *Pour savoir si un nombre n est premier :*
Méthode 1 : *Tester tous les diviseurs de 2 jusqu'à $n-1$*
Si aucun ne divise n, alors n est premier.
Méthode 2 (plus rapide) : *Tester uniquement les diviseurs de 2 jusqu'à $\sqrt{n}$*
Si aucun ne divise n, alors n est premier.

Exemple 3. ***1)*** *29 est-il premier ?*
On teste les diviseurs jusqu'à $\sqrt{29} \approx 5{,}4$: 2, 3, 4, 5

- $29 \div 2 = 14{,}5$ *(pas entier)*
- $29 \div 3 = 9{,}67...$ *(pas entier)*
- $29 \div 4 = 7{,}25$ *(pas entier)*
- $29 \div 5 = 5{,}8$ *(pas entier)*

29 est premier.
2) *51 est-il premier ?*
On teste : $51 \div 3 = 17$
51 n'est pas premier ($51 = 3 \times 17$).

2 Décomposition en produit de facteurs premiers

2.1 Théorème fondamental de l'arithmétique

Théorème 1. *Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) comme un produit de nombres premiers.*
*Cette écriture s'appelle la **décomposition en produit de facteurs premiers**.*

Exemple 4.

- $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
- $30 = 2 \times 3 \times 5$
- $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$
- $17 = 17$ *(déjà premier)*

2.2 Méthode de décomposition

Méthode 2. *Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :*
Étape 1 : *On divise le nombre par le plus petit nombre premier qui le divise (généralement 2)*
Étape 2 : *On divise le résultat obtenu par le plus petit nombre premier qui le divise*
Étape 3 : *On recommence jusqu'à obtenir 1*
Étape 4 : *On écrit le produit de tous les diviseurs utilisés*

Exemple 5. ***Décomposer 360 en produit de facteurs premiers :***

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
Vérification : $8 \times 9 \times 5 = 360$

Exemple 6. ***Autres décompositions :***
1) *Décomposer 84 :*

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$
2) *Décomposer 225 :*

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$225 = 3^2 \times 5^2$
3) *Décomposer 196 :*

196	2
98	2
49	7
7	7
1	

$196 = 2^2 \times 7^2$

2.3 Utilisation des décompositions

Propriété 2. *La décomposition en facteurs premiers permet de :*

— *Trouver tous les diviseurs d'un nombre*

— *Simplifier des fractions*

— *Calculer le PGCD et le PPCM de deux nombres*

Exemple 7. *Trouver tous les diviseurs de* $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
Les diviseurs sont tous les produits qu'on peut former avec :

— *0, 1 ou 2 facteurs 2*

— *0 ou 1 facteur 3*

— *0 ou 1 facteur 5*

Diviseurs de 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
Nombre de diviseurs : $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$ *diviseurs*

3 PGCD - Plus Grand Commun Diviseur

3.1 Définition

Définition 3. *Le **PGCD** (Plus Grand Commun Diviseur) de deux nombres entiers a et b est le plus grand entier qui divise à la fois a et b.*
On note : $PGCD(a, b)$ ou simplement $(a \wedge b)$

Exemple 8. *Diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12*
Diviseurs de 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18
Diviseurs communs : 1, 2, 3, 6
$PGCD(12, 18) = 6$

3.2 Propriétés du PGCD

Propriété 3.
- $PGCD(a, b) \leq a$ *et* $PGCD(a, b) \leq b$
- $PGCD(a, b) = PGCD(b, a)$ *(commutativité)*
- $PGCD(a, 0) = a$
- $PGCD(a, 1) = 1$
- *Si a divise b, alors $PGCD(a, b) = a$*

Définition 4. *Deux nombres sont **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1.*

Exemple 9. *1)* $PGCD(15, 28) = 1$
15 et 28 sont premiers entre eux.
2) $PGCD(24, 36) = 12$
24 et 36 ne sont pas premiers entre eux.

3.3 Méthodes de calcul du PGCD

3.3.1 Méthode 1 : Liste des diviseurs

Méthode 3.
1. *Lister tous les diviseurs de a*
2. *Lister tous les diviseurs de b*
3. *Identifier les diviseurs communs*
4. *Prendre le plus grand*

Exemple 10. *Calculer $PGCD(24, 36)$*
Diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
Diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
Diviseurs communs : 1, 2, 3, 4, 6, 12
$PGCD(24, 36) = 12$

3.3.2 Méthode 2 : Décomposition en facteurs premiers

Méthode 4.
1. *Décomposer a en produit de facteurs premiers*
2. *Décomposer b en produit de facteurs premiers*
3. *Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs avec le plus petit exposant*

Exemple 11. *Calculer* $PGCD(72, 108)$

$72 = 2^3 \times 3^2$

$108 = 2^2 \times 3^3$

Facteurs communs :

— *2 apparaît avec exposants 3 et 2* $\rightarrow$ *on prend* 2^2

— *3 apparaît avec exposants 2 et 3* $\rightarrow$ *on prend* 3^2

$PGCD(72, 108) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

3.3.3 Méthode 3 : Algorithme d'Euclide

Méthode 5 (Algorithme d'Euclide). *Pour calculer* $PGCD(a, b)$ *avec* $a > b$ *:*

Étape 1 : *Diviser a par b et noter le reste r*

Étape 2 : *Remplacer a par b et b par r*

Étape 3 : *Recommencer jusqu'à obtenir un reste nul*

Le PGCD est le dernier reste non nul.

Exemple 12. *Calculer* $PGCD(84, 36)$ *par l'algorithme d'Euclide :*

$$84 = 36 \times 2 + 12$$
$$36 = 12 \times 3 + 0$$

Le dernier reste non nul est 12.

$PGCD(84, 36) = 12$

Exemple 13. *Calculer* $PGCD(105, 45)$ *:*

$$105 = 45 \times 2 + 15$$
$$45 = 15 \times 3 + 0$$

$PGCD(105, 45) = 15$

3.4 Applications du PGCD

Application 1. ***Simplification de fractions :***

Pour simplifier $\frac{72}{108}$, *on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.*

$PGCD(72, 108) = 36$

$\frac{72}{108} = \frac{72 \div 36}{108 \div 36} = \frac{2}{3}$

Application 2. ***Problème de partage :***

On a 48 chocolats et 72 bonbons. On veut faire des sachets identiques.

Combien de sachets peut-on faire au maximum ?

$PGCD(48, 72) = 24$

On peut faire 24 sachets.

Chaque sachet contiendra : $\frac{48}{24} = 2$ *chocolats et* $\frac{72}{24} = 3$ *bonbons.*

4 PPCM - Plus Petit Commun Multiple

4.1 Définition

Définition 5. *Le **PPCM** (Plus Petit Commun Multiple) de deux nombres entiers a et b est le plus petit entier (non nul) qui est à la fois multiple de a et de b.*
On note : $PPCM(a, b)$ ou simplement $(a \vee b)$

Exemple 14. *Multiples de 4 : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...*
Multiples de 6 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...
Multiples communs : 12, 24, 36, ...
$PPCM(4, 6) = 12$

4.2 Propriétés du PPCM

Propriété 4.
- $PPCM(a, b) \geq a$ *et* $PPCM(a, b) \geq b$
- $PPCM(a, b) = PPCM(b, a)$ *(commutativité)*
- $PPCM(a, 1) = a$
- *Si a divise b, alors $PPCM(a, b) = b$*
- $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b$

4.3 Méthodes de calcul du PPCM

4.3.1 Méthode 1 : Décomposition en facteurs premiers

Méthode 6.
1. *Décomposer a en produit de facteurs premiers*
2. *Décomposer b en produit de facteurs premiers*
3. *Le PPCM est le produit de tous les facteurs premiers (communs ou non) avec le plus grand exposant*

Exemple 15. *Calculer $PPCM(72, 108)$*
$72 = 2^3 \times 3^2$
$108 = 2^2 \times 3^3$
Pour chaque facteur premier, on prend le plus grand exposant :
- *2 apparaît avec exposants 3 et 2 $\rightarrow$ on prend 2^3*
- *3 apparaît avec exposants 2 et 3 $\rightarrow$ on prend 3^3*

$PPCM(72, 108) = 2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = 216$
Vérification :
$PGCD(72, 108) \times PPCM(72, 108) = 36 \times 216 = 7776$
$72 \times 108 = 7776$

4.3.2 Méthode 2 : Formule avec le PGCD

Propriété 5.

$$PPCM(a, b) = \frac{a \times b}{PGCD(a, b)}$$

Exemple 16. *Calculer $PPCM(24, 36)$ sachant que $PGCD(24, 36) = 12$*
$PPCM(24, 36) = \frac{24 \times 36}{12} = \frac{864}{12} = 72$

4.4 Applications du PPCM

Application 3. ***Problème de synchronisation :***
Un feu rouge clignote toutes les 12 secondes.
Un autre feu clignote toutes les 18 secondes.
Si les deux feux clignotent en même temps à l'instant 0, quand clignoteront-ils à nouveau ensemble ?
$PPCM(12, 18) = ?$
$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
$PPCM(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$
Ils clignoteront ensemble après 36 secondes.

Application 4. ***Problème de carrelage :***
On dispose de carreaux rectangulaires de 15 cm sur 20 cm.
Quelle est la plus petite surface carrée qu'on peut carreler avec ces carreaux ?
Il faut trouver le plus petit carré dont le côté est multiple de 15 et de 20.
$PPCM(15, 20) = ?$
$15 = 3 \times 5$
$20 = 2^2 \times 5$
$PPCM(15, 20) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$
Le carré aura un côté de 60 cm.
Nombre de carreaux : $\frac{60}{15} \times \frac{60}{20} = 4 \times 3 = 12$ *carreaux.*

5 Applications

5.1 Exercices sur la décomposition

Application 5. ***Exercice 1 :*** *Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.*
Solution :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Application 6. ***Exercice 2 :*** *Combien 600 a-t-il de diviseurs ?*
Solution :
$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$
Nombre de diviseurs : $(3 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$ *diviseurs*

5.2 Exercices sur le PGCD

Application 7. ***Exercice 3 :*** *Calculer* $PGCD(126, 147)$
Solution par décomposition :
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$
$147 = 3 \times 7^2$
Facteurs communs : 3^1 *et* 7^1
$PGCD(126, 147) = 3 \times 7 = 21$

Application 8. ***Exercice 4 :*** *On a 56 roses et 84 œillets. On veut faire des bouquets identiques. Combien de bouquets peut-on faire au maximum ? Combien de fleurs de chaque sorte par bouquet ?*

Solution :

$PGCD(56, 84) = ?$

$56 = 2^3 \times 7$

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

$PGCD(56, 84) = 2^2 \times 7 = 28$

On peut faire 28 bouquets.

Chaque bouquet contiendra : $\frac{56}{28} = 2$ *roses et* $\frac{84}{28} = 3$ *œillets.*

5.3 Exercices sur le PPCM

Application 9. ***Exercice 5 :*** *Calculer* $PPCM(45, 75)$

Solution :

$45 = 3^2 \times 5$

$75 = 3 \times 5^2$

$PPCM(45, 75) = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$

Application 10. ***Exercice 6 :*** *Deux bus partent ensemble d'un arrêt. Le premier revient toutes les 12 minutes, le second toutes les 18 minutes.*

Au bout de combien de temps se retrouveront-ils ensemble à l'arrêt ?

Solution :

$PPCM(12, 18) = ?$

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$

$PPCM(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$

Ils se retrouveront au bout de 36 minutes.

6 Tableaux récapitulatifs

6.1 Nombres premiers jusqu'à 100

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97					

6.2 Méthodes de calcul

PGCD

Méthode	**Principe**
Liste des diviseurs	Lister et comparer
Facteurs premiers	Produit des facteurs communs avec **plus petit** exposant
Algorithme d'Euclide	Divisions successives jusqu'à reste nul

PPCM

Méthode	**Principe**
Liste des multiples	Lister et comparer
Facteurs premiers	Produit de tous les facteurs avec **plus grand** exposant
Formule	$\text{PPCM}(a,b) = \dfrac{a \times b}{\text{PGCD}(a,b)}$

6.3 Propriétés importantes

Propriété	**Formule**
Relation PGCD-PPCM	$\text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b) = a \times b$
Nombres premiers entre eux	$\text{PGCD}(a,b) = 1$
PGCD avec diviseur	Si $a \mid b$ alors $\text{PGCD}(a,b) = a$
PPCM avec diviseur	Si $a \mid b$ alors $\text{PPCM}(a,b) = b$

6.4 Applications pratiques

Problème	**Outil**	**Question**
Partage en lots identiques	PGCD	Nombre maximum de lots
Simplification de fractions	PGCD	Diviser par le PGCD
Carrelage, pavage	PPCM	Plus petite surface
Synchronisation, rendez-vous	PPCM	Prochaine coïncidence

6.5 Aide-mémoire

Concept	**Retenir**
Nombre premier	Exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même
2 est premier	C'est le seul nombre premier pair
1 n'est pas premier	Il n'a qu'un seul diviseur
PGCD	Le plus grand qui divise les deux
PPCM	Le plus petit divisible par les deux
PGCD	Facteurs communs, **plus petit** exposant
PPCM	Tous les facteurs, **plus grand** exposant