1 Limite d'une fonction en un point

1.1 Définitions

Définition 1 (Limite finie en un point). *Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a (sauf peut-être en a).*

On dit que f admet pour limite le réel ℓ en a si $f(x)$ se rapproche de ℓ quand x se rapproche de a.

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Définition 2 (Limite infinie en un point). *On dit que f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a si $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut (respectivement aussi petit que l'on veut) quand x se rapproche de a.*

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *(ou $-\infty$)*

Exemple 1.
- $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1) = 7$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x-1)$ *n'existe pas (ou $= -\infty$ si $x \to 1^+$)*

1.2 Limite à gauche et à droite

Définition 3.
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ *signifie que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs inférieures (à gauche)*
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ *signifie que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures (à droite)*

Théorème 1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$

Exemple 2. *Pour* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *:*
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ *n'existe pas*

2 Limite d'une fonction à l'infini

2.1 Définitions

Définition 4 (Limite finie en $+\infty$). *On dit que f admet pour limite le réel ℓ en $+\infty$ si $f(x)$ se rapproche de ℓ quand x devient aussi grand que l'on veut.*

On note : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$

Définition 5 (Limite infinie en $+\infty$). *On dit que f admet pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en $+\infty$ si $f(x)$ devient aussi grand (ou aussi petit) que l'on veut quand x devient aussi grand que l'on veut.*

On note : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *(ou $-\infty$)*

Remarque 1. *Les définitions sont analogues pour les limites en* $-\infty$.

Exemple 3.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3 Limites des fonctions usuelles

3.1 Fonction polynôme

Propriété 1. *Pour une fonction polynôme* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *avec* $a_n \neq 0$ *:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

La limite en $\pm\infty$ *est déterminée par le terme de plus haut degré.*

Exemple 4.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 5x + 1) = +\infty$ *(car* $3x^2 \to +\infty$*)*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - 5x + 1) = +\infty$ *(car* $3x^2 \to +\infty$*)*
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + x) = -\infty$ *(car* $-2x^3 \to -\infty$*)*

3.2 Fonction rationnelle

Propriété 2. *Pour une fonction rationnelle* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *où* P *est de degré* p *et* Q *de degré* q *:*

- *Si* $p < q$ *:* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
- *Si* $p = q$ *:* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_p}{b_q}$ *(rapport des coefficients dominants)*
- *Si* $p > q$ *:* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Exemple 5. *1)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{5x-1}$

Degrés égaux : $p = q = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{5x-1} = \frac{2}{5}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^3-2}$

$p = 2 < q = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^3-2} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-2x}{x^2+1}$

$p = 3 > q = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-2x}{x^2+1} = +\infty$

3.3 Limites de référence

Fonction	**En** $+\infty$	**En** $-\infty$
x^n (n pair)	$+\infty$	$+\infty$
x^n (n impair)	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x^n}$	0	0
e^x	$+\infty$	0
$\ln(x)$	$+\infty$	—
$\sqrt{x}$	$+\infty$	—
$\sin(x)$	n'existe pas	n'existe pas
$\cos(x)$	n'existe pas	n'existe pas

Fonction	**En** 0^+	**En** 0^-	**En** 0
$\frac{1}{x}$	$+\infty$	$-\infty$	n'existe pas
$\frac{1}{x^2}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	—	—
e^x	1	1	1
$\sqrt{x}$	0	—	—

4 Opérations sur les limites

4.1 Somme

Si $\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque 2. ***Forme indéterminée (FI)*** *:* $+\infty - \infty$ *ou* $-\infty + \infty$
Il faut lever l'indétermination par des techniques de calcul.

4.2 Produit

Si $\lim f$	$\ell \neq 0$	$\ell > 0$	0	$+\infty$
et $\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
alors $\lim(f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	FI	$+\infty$

Remarque 3. ***Forme indéterminée (FI)*** *:* $0 \times \infty$

4.3 Quotient

Si $\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	0
et $\lim g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	FI	FI

Remarque 4. ***Formes indéterminées (FI)*** *:* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *et* $\dfrac{0}{0}$

4.4 Composition

Théorème 2 (Limite d'une fonction composée)**.** *Si* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$*, alors :*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = \ell$$

Exemple 6. *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$

Posons $g(x) = -x$*, donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

5 Levée des formes indéterminées

5.1 Forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

Méthode 1 (Fonction rationnelle)**.** *Pour calculer* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *:*

1. *Factoriser par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur*
2. *Simplifier*
3. *Calculer la limite*

Exemple 7. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{2x^2+x-3}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^2+x-3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} \\ &= \frac{3-0+0}{2+0-0} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

5.2 Forme indéterminée $+\infty-\infty$

Méthode 2 (Avec racines carrées)**.** *Pour lever une indétermination du type* $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ *:*

1. *Multiplier et diviser par l'expression conjuguée* $\sqrt{A}+\sqrt{B}$
2. *Utiliser l'identité remarquable :* $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
3. *Simplifier et calculer la limite*

Exemple 8. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\end{aligned}$$

On factorise par x :

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

5.3 Forme indéterminée $0\times\infty$

Méthode 3. *Transformer le produit en quotient pour obtenir une forme* $\dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemple 9. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \quad (\textit{forme } \frac{\infty}{\infty})$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

6 Limites remarquables

6.1 Croissances comparées

Théorème 3 (Croissances comparées)**.** *Pour tout entier $n \geq 1$:*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(x) = 0$

Remarque 5. *Ces limites traduisent que :*

- *L'exponentielle croît plus vite que toute puissance*
- *Le logarithme croît moins vite que toute puissance*

6.2 Limites autour de 0

Théorème 4.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

7 Asymptotes

7.1 Asymptote verticale

Définition 6. *La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f si :*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Exemple 10. *La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale car :*

- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

7.2 Asymptote horizontale

Définition 7. *La droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) si :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \left(\textit{ou} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell\right)$$

Exemple 11. *La fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ admet la droite $y = 2$ comme asymptote horizontale en $\pm\infty$ car :*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

7.3 Asymptote oblique

Définition 8. *La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) si :*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Méthode 4 (Recherche d'une asymptote oblique)**.** *Pour trouver une asymptote oblique en $+\infty$:*

1. *Calculer* $a = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
2. *Calculer* $b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$
3. *L'asymptote est* $y = ax + b$

Exemple 12. *Chercher l'asymptote oblique de* $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ *en* $+\infty$.

Étape 1 : *Calculer a*

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x(x + 1)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1 \end{aligned}$$

Étape 2 : *Calculer b*
On effectue la division euclidienne : $x^2 + x + 1 = (x + 1) \times x + 1$
Donc $f(x) = x + \dfrac{1}{x + 1}$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

Conclusion : *L'asymptote oblique est* $y = x$

8 Applications

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Calculer* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - 2x + 1}{5x^3 + x^2 - 7}$

Solution :
Degrés égaux $(p = q = 3)$, *donc :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x^3 + x^2 - 7} = \frac{3}{5}$$

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Calculer* $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

Solution :
Forme indéterminée $+\infty - \infty$. *On utilise l'expression conjuguée :*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{2}=1
\end{aligned}$$

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Calculer* $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$

Solution :

Forme indéterminée $0\times(-\infty)$. *On utilise une limite remarquable :*

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$$

9 Tableau récapitulatif des formes indéterminées

Forme indéterminée	**Technique de levée**
$\frac{\infty}{\infty}$	Factoriser par le terme dominant
$\frac{0}{0}$	Simplifier, factoriser
$+\infty-\infty$	Expression conjuguée, factorisation
$0\times\infty$	Transformer en quotient
1^∞, 0^0, ∞^0	Utiliser la fonction ln