1 Primitives

1.1 Définition

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
Une fonction F est une ***primitive*** *de f sur I si :*

- *F est dérivable sur I*
- *Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$*

Exemple 1.
- *Une primitive de $f(x) = 2x$ est $F(x) = x^2$*
- *Une primitive de $f(x) = \cos(x)$ est $F(x) = \sin(x)$*
- *Une primitive de $f(x) = e^x$ est $F(x) = e^x$*

Théorème 1. *Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme :*

$$x \mapsto F(x) + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Remarque 1. *Il existe une* ***infinité*** *de primitives pour une fonction donnée, mais elles diffèrent toutes d'une constante.*

1.2 Primitives usuelles

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Conditions**
k (constante)	kx	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x \neq 0$
e^x	e^x	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$x \neq 0$

1.3 Opérations sur les primitives

Propriété 1. *Soient f et g deux fonctions admettant des primitives F et G sur I, et k une constante réelle.*

1. *Une primitive de $f + g$ est $F + G$*
2. *Une primitive de $k \times f$ est $k \times F$*

Exemple 2. *Trouver une primitive de* $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

Une primitive est :

$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 5x = x^3 + x^2 - 5x$$

1.4 Primitive de $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$ et $u'u^n$

Propriété 2. *Si u est une fonction dérivable sur I :*

1. *Une primitive de $u'(x)e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$*
2. *Une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)|$ (avec $u(x) \neq 0$)*
3. *Une primitive de $u'(x)[u(x)]^n$ est $\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}$ (avec $n \neq -1$)*

Exemple 3.
1. *Une primitive de $2xe^{x^2}$ est e^{x^2} car $(x^2)' = 2x$*
2. *Une primitive de $\frac{2x}{x^2+1}$ est $\ln(x^2+1)$ car $(x^2+1)' = 2x$*
3. *Une primitive de $2x(x^2+1)^3$ est $\frac{(x^2+1)^4}{4}$ car $(x^2+1)' = 2x$*

2 Intégrale définie

2.1 Définition

Définition 2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$.*

*L'**intégrale de** f **de** a **à** b, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est le nombre réel :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Remarque 2.
- *a est la **borne inférieure** et b est la **borne supérieure***
- *Le résultat ne dépend pas du choix de la primitive F*
- *La variable x est muette : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$*

Exemple 4. *Calculer $I = \int_1^3 2x\,\mathrm{d}x$.*

Une primitive de $f(x) = 2x$ est $F(x) = x^2$.
Donc :

$$I = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

2.2 Interprétation graphique

Propriété 3 (Aire sous la courbe)**.** *Si f est une fonction **positive** et continue sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par :*

- *La courbe représentative de f*
- *L'axe des abscisses*

— *Les droites d'équation* $x = a$ *et* $x = b$

Remarque 3. — *Si* $f(x) \geq 0$ *sur* $[a; b]$, *alors* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

— *Si* $f(x) \leq 0$ *sur* $[a; b]$, *alors* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$

— *L'aire est toujours positive :* $\mathcal{A} = \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|$

2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 4. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a; b]$ *et* k *une constante réelle.*

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *(inversion des bornes)*
3. $\int_a^b k \times f(x)\,\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité)*
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité)*
5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(relation de Chasles)*

Exemple 5. *Sachant que* $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ *et* $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, *calculer :*

1. $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + 3 = 8$
2. $\int_5^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -8$
3. $\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \times \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \times 5 = 15$

3 Calcul d'intégrales

3.1 Intégrales usuelles

Exemple 6. *Calculer les intégrales suivantes :*

1) $I = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$

Une primitive de x^2 *est* $\frac{x^3}{3}$.

$I = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$

2) $J = \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Une primitive de $\frac{1}{x}$ *est* $\ln(x)$ *sur* $]0; +\infty[$.

$J = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

3) $K = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

Une primitive de $\sin(x)$ *est* $-\cos(x)$*.*

$K = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2$

3.2 Méthode par décomposition

Méthode 1. *Pour calculer une intégrale complexe :*

1. *Décomposer la fonction en sommes ou différences de fonctions usuelles*
2. *Utiliser la linéarité de l'intégrale*
3. *Calculer chaque intégrale séparément*

Exemple 7. *Calculer* $I = \int_0^1 (3x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\
&= 3\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\
&= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [x]_0^1 \\
&= 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} - 1 \\
&= 1 + 1 - 1 = 1
\end{aligned}$$

3.3 Intégrales avec exponentielle et logarithme

Exemple 8. *1) Calculer* $I = \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x$

On reconnaît la forme $u'e^u$ *avec* $u(x) = 2x$ *et* $u'(x) = 2$*.*

Une primitive de e^{2x} *est* $\frac{e^{2x}}{2}$*.*

$I = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$

2) Calculer $J = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ *avec* $u(x) = x^2 + 1$ *et* $u'(x) = 2x$*.*

Une primitive est $\ln(x^2 + 1)$*.*

$J = \left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 = \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

4 Valeur moyenne

Définition 3. *Soit* f *une fonction continue sur* $[a; b]$*.*
La ***valeur moyenne*** *de* f *sur* $[a; b]$ *est :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 9. *Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0;3]$.*

$$\mu = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\times\frac{27}{3} = 3$$

5 Applications

5.1 Calcul d'aires

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de $f(x) = x^2$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 3$.*

Solution :

$f(x) \geq 0$ sur $[1;3]$, donc :

$$\mathcal{A} = \int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\ u.a.$$

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Calculer l'aire entre la courbe de $f(x) = -x^2+4$ et l'axe des abscisses sur $[0;2]$.*

Solution :

$f(x) \geq 0$ sur $[0;2]$ (car $-x^2+4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4$), donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 (-x^2+4)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2 \\ &= -\frac{8}{3}+8-0 \\ &= \frac{16}{3}\ u.a.\end{aligned}$$

5.2 Équations avec intégrales

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Déterminer la valeur de a ($a > 0$) telle que $\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x = 8$.*

Solution :

$$\begin{aligned}\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x &= 8 \\ \left[x^2\right]_0^a &= 8 \\ a^2 - 0 &= 8 \\ a^2 &= 8 \\ a &= 2\sqrt{2} \quad (car\ a > 0)\end{aligned}$$

5.3 Tableaux récapitulatifs

Intégrales à connaître

Fonction	**Intégrale**
$\int_a^b k \,\mathrm{d}x$	$k(b-a)$
$\int_a^b x^n \,\mathrm{d}x$	$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$
$\int_a^b e^x \,\mathrm{d}x$	$[e^x]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$	$[\ln(x)]_a^b \quad (a, b > 0)$
$\int_a^b \cos(x) \,\mathrm{d}x$	$[\sin(x)]_a^b$
$\int_a^b \sin(x) \,\mathrm{d}x$	$[-\cos(x)]_a^b$