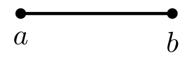
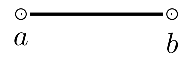
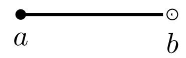
1 Les intervalles

1.1 Définitions

Définition 1. *Un **intervalle** est un ensemble de nombres réels compris entre deux bornes.*
On distingue :

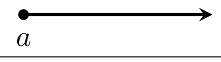
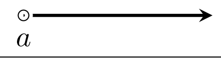
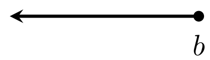
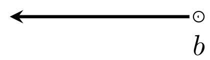
- *Les **intervalles fermés** : les bornes appartiennent à l'intervalle*
- *Les **intervalles ouverts** : les bornes n'appartiennent pas à l'intervalle*
- *Les **intervalles semi-ouverts** (ou semi-fermés) : une seule borne appartient à l'intervalle*

1.2 Notations

Notation	Définition	Représentation
$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
$]a;b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
$[a;b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$]a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

Remarque 1.
- *Un crochet **fermé** [ou] signifie que la borne est incluse*
- *Un crochet **ouvert**] ou [signifie que la borne est exclue*
- *Sur la droite, un point plein $\bullet$ indique une borne incluse*
- *Sur la droite, un point vide $\circ$ indique une borne exclue*

1.3 Intervalles infinis

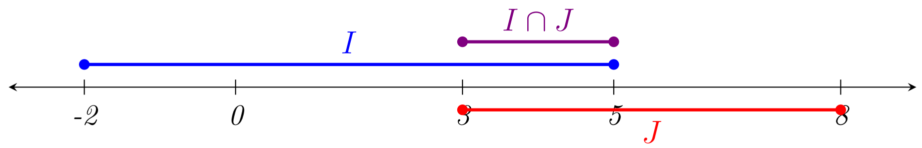
Notation	Définition	Représentation
$[a;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$]a;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$]-\infty;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
$]-\infty;b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
$]-\infty;+\infty[$	$\mathbb{R}$	

Remarque 2. — *L'infini* (∞) *n'est pas un nombre réel*
- *On utilise toujours un crochet ouvert avec* $+\infty$ *ou* $-\infty$
- $]-\infty;+\infty[$ *est l'ensemble de tous les nombres réels, noté* $\mathbb{R}$

1.4 Opérations sur les intervalles

Définition 2. ***Intersection :*** $I \cap J$ *est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à* I *et à* J.
Réunion : $I \cup J$ *est l'ensemble des nombres qui appartiennent à* I *ou à* J *(ou aux deux).*

Exemple 1. ***1)*** *Intersection :*
$I = [-2;5]$ *et* $J = [3;8]$
$I \cap J = [3;5]$



2) *Réunion :*
$I = [-2;5]$ *et* $J = [3;8]$
$I \cup J = [-2;8]$
3) *Intersection vide :*
$I = [-3;2]$ *et* $J = [5;9]$
$I \cap J = \emptyset$ *(aucun élément commun)*
4) *Réunion non connexe :*
$I = [-3;2[$ *et* $J =]4;9]$
$I \cup J = [-3;2[\cup]4;9]$
On ne peut pas simplifier davantage.

1.5 Appartenance à un intervalle

Exemple 2. *Soit* $I = [-2;5[$.
1) $3 \in I$ *? Oui, car* $-2 \leq 3 < 5$
2) $-2 \in I$ *? Oui, car* -2 *est inclus (crochet fermé)*
3) $5 \in I$ *? Non, car* 5 *est exclu (crochet ouvert)*
4) $7 \in I$ *? Non, car* $7 > 5$
5) $-5 \in I$ *? Non, car* $-5 < -2$

2 Valeur absolue

2.1 Définition

Définition 3. *La* ***valeur absolue*** *d'un nombre réel* x, *notée* $|x|$, *est sa distance à zéro sur la droite des réels.*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 3. — $|5| = 5$ *(car* $5 > 0$*)*

— $|-3| = 3$ *(car $-3 < 0$, donc on prend l'opposé)*
— $|0| = 0$
— $|-7{,}2| = 7{,}2$
— $\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

2.2 Propriétés de la valeur absolue

Propriété 1. *Pour tous nombres réels a et b :*
— $|x| \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
— $|x| = 0 \iff x = 0$
— $|-x| = |x|$
— $|x \times y| = |x| \times |y|$
— $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *si* $y \neq 0$
— $|x^2| = x^2$
— $|x|^2 = x^2$

Propriété 2 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous nombres réels a et b :*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

2.3 Interprétation géométrique

Propriété 3. *Pour tout nombre réel a :*
$|x-a|$ représente la ***distance*** *entre x et a sur la droite des réels.*

Exemple 4. ***1)*** *$|x-3|$ est la distance entre x et 3*
2) *$|x+2| = |x-(-2)|$ est la distance entre x et -2*
3) *$|x|$ est la distance entre x et 0*

3 Équations avec valeur absolue

3.1 Équation $|x| = a$

Propriété 4. *Pour résoudre $|x| = a$:*
Si *$a < 0$* ***:*** *Aucune solution (car $|x| \geq 0$ toujours)*
Si *$a = 0$* ***:*** *$x = 0$*
Si *$a > 0$* ***:*** *$x = a$ ou $x = -a$*

Exemple 5. ***1)*** *Résoudre $|x| = 5$*
$x = 5$ ou $x = -5$
$S = \{-5; 5\}$
2) *Résoudre $|x| = -3$*
Impossible car $|x| \geq 0$
$S = \emptyset$
3) *Résoudre $|x| = 0$*
$x = 0$
$S = \{0\}$

3.2 Équation $|ax+b|=c$

Méthode 1. *Pour résoudre $|ax+b|=c$:*

Étape 1 : *Vérifier que $c \geq 0$ (sinon pas de solution)*

Étape 2 : *Résoudre les deux équations :*

— $ax+b=c$

— $ax+b=-c$

Étape 3 : *L'ensemble solution est la réunion des solutions des deux équations*

Exemple 6. ***1)*** *Résoudre* $|2x-3|=7$

$2x-3=7$ *ou* $2x-3=-7$

Première équation :

$2x-3=7$

$2x=10$

$x=5$

Deuxième équation :

$2x-3=-7$

$2x=-4$

$x=-2$

$S=\{-2;5\}$

2) *Résoudre* $|3x+6|=9$

$3x+6=9$ *ou* $3x+6=-9$

$3x=3$ *ou* $3x=-15$

$x=1$ *ou* $x=-5$

$S=\{-5;1\}$

3) *Résoudre* $|x-4|=2$

$x-4=2$ *ou* $x-4=-2$

$x=6$ *ou* $x=2$

$S=\{2;6\}$

4) *Résoudre* $|5x+1|=-3$

Impossible car $|5x+1| \geq 0$

$S=\emptyset$

3.3 Équation $|ax+b|=|cx+d|$

Méthode 2. *Pour résoudre $|ax+b|=|cx+d|$:*

On utilise la propriété : $|A|=|B| \iff A=B$ ou $A=-B$

Donc on résout :

— $ax+b=cx+d$

— $ax+b=-(cx+d)$

Exemple 7. *Résoudre* $|2x-1|=|x+3|$

Cas 1 : $2x-1=x+3$

$x=4$

Cas 2 : $2x-1=-(x+3)$

$2x-1=-x-3$

$3x=-2$

$x=-\frac{2}{3}$

$S=\left\{-\frac{2}{3};4\right\}$

4 Inéquations avec valeur absolue

4.1 Inéquation $|x| < a$

Propriété 5. *Pour résoudre $|x| < a$ (ou $|x| \leq a$) :*
***Si** $a \leq 0$ **:** Aucune solution (car $|x| \geq 0$)*
***Si** $a > 0$ **:** $-a < x < a$, soit $x \in]-a; a[$*
Pour $|x| \leq a$ avec $a > 0$: $x \in [-a; a]$

Remarque 3. *$|x| < a$ signifie que la distance de x à 0 est inférieure à a.*
Donc x est à moins de a unités de 0, c'est-à-dire entre $-a$ et a.

Exemple 8. ***1)** Résoudre $|x| < 3$*
$-3 < x < 3$
$S =]-3; 3[$
***2)** Résoudre $|x| \leq 5$*
$-5 \leq x \leq 5$
$S = [-5; 5]$
***3)** Résoudre $|x| < -2$*
Impossible
$S = \emptyset$

4.2 Inéquation $|x| > a$

Propriété 6. *Pour résoudre $|x| > a$ (ou $|x| \geq a$) :*
***Si** $a < 0$ **:** Tout réel est solution, $S = \mathbb{R}$*
***Si** $a = 0$ **:** Tous les réels sauf 0, $S = \mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)*
***Si** $a > 0$ **:** $x < -a$ ou $x > a$, soit $x \in]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[$*
Pour $|x| \geq a$ avec $a > 0$: $x \in]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$

Exemple 9. ***1)** Résoudre $|x| > 4$*
$x < -4$ *ou* $x > 4$
$S =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$
***2)** Résoudre $|x| \geq 2$*
$x \leq -2$ *ou* $x \geq 2$
$S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$
***3)** Résoudre $|x| > 0$*
Tous les réels sauf 0
$S = \mathbb{R}^*$ *ou* $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4.3 Inéquation $|ax + b| < c$

Méthode 3. *Pour résoudre $|ax + b| < c$ avec $c > 0$:*
$|ax + b| < c \iff -c < ax + b < c$
On résout la double inégalité :

- $ax + b > -c$
- $ax + b < c$

Puis on fait l'intersection des deux ensembles solutions.

Exemple 10. *1) Résoudre* $|2x-3|<5$
$-5<2x-3<5$
On ajoute 3 à tous les membres :
$-5+3<2x<5+3$
$-2<2x<8$
On divise par 2 :
$-1<x<4$
$S=]-1;4[$
2) Résoudre $|3x+6|\leq 9$
$-9\leq 3x+6\leq 9$
$-15\leq 3x\leq 3$
$-5\leq x\leq 1$
$S=[-5;1]$
3) Résoudre $|x-4|<2$
$-2<x-4<2$
$2<x<6$
$S=]2;6[$
Interprétation : *Les nombres dont la distance à 4 est inférieure à 2.*

4.4 Inéquation $|ax+b|>c$

Méthode 4. *Pour résoudre* $|ax+b|>c$ *avec* $c>0$ *:*
$|ax+b|>c \iff ax+b<-c$ *ou* $ax+b>c$
On résout les deux inéquations séparément, puis on fait la réunion.

Exemple 11. *1) Résoudre* $|2x-3|>5$
$2x-3<-5$ *ou* $2x-3>5$
Première inéquation :
$2x-3<-5$
$2x<-2$
$x<-1$
Deuxième inéquation :
$2x-3>5$
$2x>8$
$x>4$
$S=]-\infty;-1[\cup]4;+\infty[$
2) Résoudre $|x+1|\geq 3$
$x+1\leq -3$ *ou* $x+1\geq 3$
$x\leq -4$ *ou* $x\geq 2$
$S=]-\infty;-4]\cup[2;+\infty[$
3) Résoudre $|3x-6|>12$
$3x-6<-12$ *ou* $3x-6>12$
$3x<-6$ *ou* $3x>18$
$x<-2$ *ou* $x>6$
$S=]-\infty;-2[\cup]6;+\infty[$

5 Applications

5.1 Distance entre deux nombres

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Déterminer l'ensemble des nombres dont la distance à 5 est égale à 3.*

Solution :
La distance de x *à 5 est* $|x-5|$.
On résout $|x-5|=3$ *:*
$x-5=3$ *ou* $x-5=-3$
$x=8$ *ou* $x=2$
$S=\{2;8\}$
Les nombres 2 et 8 sont à une distance de 3 de 5.

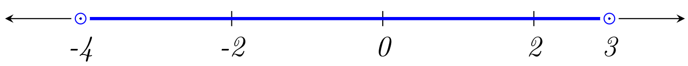
Application 2. ***Exercice 2 :*** *Déterminer l'ensemble des nombres dont la distance à* -2 *est inférieure ou égale à 4.*

Solution :
La distance de x *à* -2 *est* $|x-(-2)|=|x+2|$.
On résout $|x+2|\leq 4$ *:*
$-4\leq x+2\leq 4$
$-6\leq x\leq 2$
$S=[-6;2]$

5.2 Encadrement

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Résoudre* $|2x+1|<7$ *et représenter l'ensemble solution.*

Solution :
$-7<2x+1<7$
$-8<2x<6$
$-4<x<3$
$S=]-4;3[$



Application 4. ***Exercice 4 :*** *Résoudre* $|x-3|\geq 5$ *et représenter l'ensemble solution.*

Solution :
$x-3\leq -5$ *ou* $x-3\geq 5$
$x\leq -2$ *ou* $x\geq 8$
$S=]-\infty;-2]\cup[8;+\infty[$

6 Tableaux récapitulatifs

6.1 Intervalles

Notation	**Inégalité**	**Type**
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	Fermé
$]a;b[$	$a < x < b$	Ouvert
$[a;b[$	$a \leq x < b$	Semi-ouvert à droite
$]a;b]$	$a < x \leq b$	Semi-ouvert à gauche
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	Infini à droite
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	Infini à gauche

6.2 Équations avec valeur absolue

Équation	**Solution**
$\|x\| = a$ (avec $a > 0$)	$x = a$ ou $x = -a$
$\|x\| = 0$	$x = 0$
$\|x\| = a$ (avec $a < 0$)	Aucune solution
$\|ax+b\| = c$ (avec $c > 0$)	$ax+b = c$ ou $ax+b = -c$
$\|A\| = \|B\|$	$A = B$ ou $A = -B$

6.3 Inéquations avec valeur absolue

Inéquation	**Solution (avec $a > 0$)**
$\|x\| < a$	$-a < x < a$ soit $]-a; a[$
$\|x\| \leq a$	$-a \leq x \leq a$ soit $[-a; a]$
$\|x\| > a$	$x < -a$ ou $x > a$ soit $]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[$
$\|x\| \geq a$	$x \leq -a$ ou $x \geq a$ soit $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$
$\|ax + b\| < c$	$-c < ax + b < c$
$\|ax + b\| > c$	$ax + b < -c$ ou $ax + b > c$

6.4 Méthode générale

Type	**Méthode**
$\|A\| = c$	Résoudre $A = c$ et $A = -c$
$\|A\| < c$	Résoudre $-c < A < c$ (double inégalité)
$\|A\| > c$	Résoudre $A < -c$ ou $A > c$ (réunion)