# 1 Généralités sur les fonctions

## 1.1 Définition d'une fonction

**Définition 1.** *Une **fonction** $f$ est un procédé qui à chaque nombre $x$ d'un ensemble de départ associe **au plus un** nombre $y$.*

*On note : $f : x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$*

- *$x$ est la **variable** (ou **antécédent**)*
- *$f(x)$ est l'**image** de $x$ par $f$*
- *Si $y = f(x)$, on dit que $x$ est un **antécédent** de $y$*

**Exemple 1.** *Soit $f(x) = 2x + 3$.*

***1)** Calculer $f(5)$ :*
$f(5) = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$
*L'image de 5 par $f$ est 13.*
***2)** Déterminer le(s) antécédent(s) de 11 :*
*On résout $f(x) = 11$ :*
$2x + 3 = 11$
$2x = 8$
$x = 4$
*Un antécédent de 11 par $f$ est 4.*

## 1.2 Ensemble de définition

**Définition 2.** *L'**ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) d'une fonction $f$, noté $D_f$, est l'ensemble des nombres réels $x$ pour lesquels $f(x)$ existe.*

**Propriété 1** (Cas d'exclusion)**.** *Un nombre $x$ n'appartient pas à l'ensemble de définition si :*

- *Il y a division par zéro*
- *Il y a racine carrée d'un nombre négatif*
- *Il y a logarithme d'un nombre négatif ou nul (hors programme Seconde)*

**Exemple 2.** ***1)** $f(x) = 3x - 5$*
*Aucune restriction : $D_f = \mathbb{R}$*
***2)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$*
*Division par zéro impossible : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $D_f = \mathbb{R}^*$*
***3)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$*
*Dénominateur non nul : $x - 3 \neq 0$, donc $x \neq 3$*
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
***4)** $f(x) = \sqrt{x}$*
*Racine carrée définie pour $x \geq 0$ : $D_f = [0; +\infty[$*
***5)** $f(x) = \sqrt{2x - 6}$*
$2x - 6 \geq 0$
$2x \geq 6$
$x \geq 3$
$D_f = [3; +\infty[$
***6)** $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \sqrt{x+1}$*
*Conditions :*

— $x-2 \neq 0$ *donc* $x \neq 2$

— $x+1 \geq 0$ *donc* $x \geq -1$

$D_f = [-1; +\infty[\setminus\{2\}$ *ou* $D_f = [-1; 2[\cup]2; +\infty[$

### 1.3 Représentation graphique

**Définition 3.** *La* ***courbe représentative*** *(ou* ***représentation graphique****) d'une fonction $f$ dans un repère est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ où $x \in D_f$.*

*On note souvent cette courbe $\mathcal{C}_f$.*

**Remarque 1.** — *Un point $M(a; b)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $b = f(a)$*

— *Une droite verticale coupe la courbe d'une fonction en au plus un point*

## 2 Variations d'une fonction

### 2.1 Définitions

**Définition 4.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.*

***Fonction croissante sur $I$ :***

*$f$ est croissante sur $I$ si pour tous $x_1, x_2 \in I$ :*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

***Fonction strictement croissante sur $I$ :***

*$f$ est strictement croissante sur $I$ si :*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

**Définition 5.** ***Fonction décroissante sur $I$ :***

*$f$ est décroissante sur $I$ si pour tous $x_1, x_2 \in I$ :*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

***Fonction strictement décroissante sur $I$ :***

*$f$ est strictement décroissante sur $I$ si :*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

**Définition 6.** *Une fonction est* ***constante*** *sur $I$ si pour tous $x_1, x_2 \in I$ :*

$$f(x_1) = f(x_2)$$

**Définition 7.** *Une fonction est* ***monotone*** *sur $I$ si elle est soit croissante, soit décroissante sur $I$.*

### 2.2 Tableau de variations

**Définition 8.** *Un* ***tableau de variations*** *résume les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.*

*Il indique :*

— *Les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante*

— *Les extremums (maximum et minimum) éventuels*

— *Les valeurs remarquables*

**Exemple 3.** *Tableau de variations d'une fonction $f$ définie sur $[-2; 5]$ :*

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $4$ |

***Lecture :***

— $f$ *est décroissante sur* $[-2; 1]$

— $f$ *est croissante sur* $[1; 5]$

— $f(-2) = 3,\ f(1) = -1,\ f(5) = 4$

— *Le minimum de $f$ sur $[-2; 5]$ est $-1$ atteint en $x = 1$*

### 2.3 Extremums

**Définition 9.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.*
***Maximum :***
*$M$ est un **maximum** de $f$ sur $I$ s'il existe $a \in I$ tel que pour tout $x \in I$ : $f(x) \leq M = f(a)$.*
***Minimum :***
*$m$ est un **minimum** de $f$ sur $I$ s'il existe $a \in I$ tel que pour tout $x \in I$ : $f(x) \geq m = f(a)$.*

**Remarque 2.** — *Un extremum est toujours atteint en un point de l'intervalle*

— *Une fonction peut ne pas avoir d'extremum sur un intervalle*

— *Un maximum local n'est pas forcément le maximum global*

## 3 Fonctions affines

### 3.1 Définition et représentation

**Définition 10.** *Une **fonction affine** est une fonction de la forme :*

$$f(x) = ax + b$$

*où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.*

— *$a$ est le **coefficient directeur** (ou pente)*

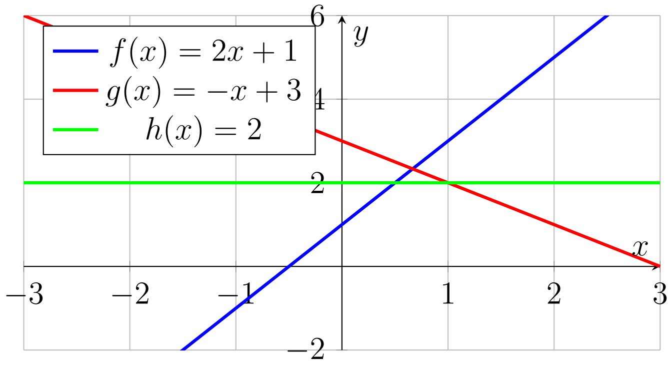
— *$b$ est l'**ordonnée à l'origine***

*L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.*

**Propriété 2.** *La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.*

**Définition 11** (Cas particuliers)**.** — *Si $a = 0$ : $f(x) = b$ (fonction **constante**), la droite est horizontale*

— *Si $b = 0$ : $f(x) = ax$ (fonction **linéaire**), la droite passe par l'origine*




## 3.2 Variations des fonctions affines

**Propriété 3.** *Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine.*
*__Si__ $a > 0$ **:** $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*
*__Si__ $a < 0$ **:** $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$*
*__Si__ $a = 0$ **:** $f$ est constante sur $\mathbb{R}$*

**Exemple 4.** ***1)*** $f(x) = 3x - 2$
*$a = 3 > 0$ : $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*
*Tableau de variations :*

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

***2)*** $g(x) = -2x + 5$
*$a = -2 < 0$ : $g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$*
*Tableau de variations :*

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

***3)*** $h(x) = 4$
*$a = 0$ : $h$ est constante sur $\mathbb{R}$*
*Tableau de variations :*

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 4 | $\rightarrow$ | 4 |

### 3.3 Signe d'une fonction affine

**Propriété 4.** *Soit $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.*

*La fonction $f$ s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ (racine de l'équation $ax + b = 0$).*

***Si** $a > 0$ :*

- $f(x) < 0$ *pour* $x < x_0$
- $f(x_0) = 0$
- $f(x) > 0$ *pour* $x > x_0$

***Si** $a < 0$ :*

- $f(x) > 0$ *pour* $x < x_0$
- $f(x_0) = 0$
- $f(x) < 0$ *pour* $x > x_0$

**Exemple 5.** *1) Étudier le signe de $f(x) = 2x - 6$*

$a = 2 > 0$

*Racine :* $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f(x) < 0$ *sur* $]-\infty; 3[$
$f(x) = 0$ *pour* $x = 3$
$f(x) > 0$ *sur* $]3; +\infty[$

*2) Étudier le signe de $g(x) = -3x + 9$*

$a = -3 < 0$

*Racine :* $-3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$

*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$g(x) > 0$ *sur* $]-\infty; 3[$
$g(x) = 0$ *pour* $x = 3$
$g(x) < 0$ *sur* $]3; +\infty[$

# 4 Fonctions du second degré

## 4.1 Définition

**Définition 12.** *Une **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme du second degré**) est une fonction de la forme :*

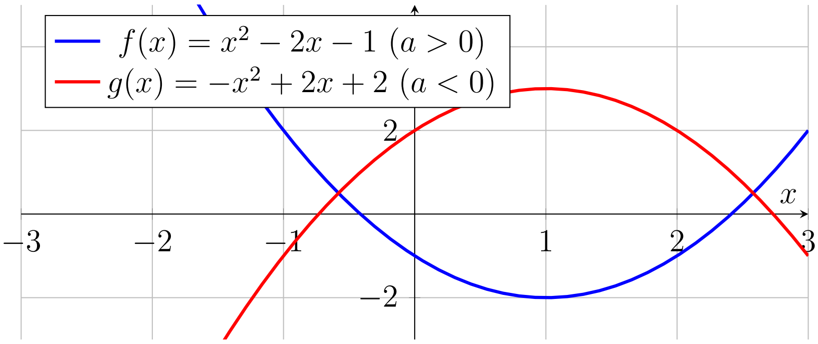
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

*où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.*

*L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.*

**Propriété 5.** *La représentation graphique d'une fonction du second degré est une* ***parabole****.*

- *Si* $a > 0$ *: la parabole est tournée vers le haut (forme de U)*
- *Si* $a < 0$ *: la parabole est tournée vers le bas (forme de* $\cap$*)*




## 4.2 Forme canonique

**Définition 13.** *La* ***forme canonique*** *d'une fonction du second degré est :*

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

*où* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont deux nombres réels.*
*Le point* $S(\alpha; \beta)$ *est le* ***sommet*** *de la parabole.*

**Propriété 6.** *Pour passer de la forme développée* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *à la forme canonique :*

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

**Exemple 6.** *Mettre* $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ *sous forme canonique.*
$a = 2$, $b = -8$, $c = 3$
$\alpha = -\frac{-8}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$
$\beta = f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$
*Forme canonique :* $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$
*Sommet :* $S(2; -5)$

## 4.3 Variations des fonctions du second degré

**Propriété 7.** *Soit* $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ *avec* $a \neq 0$*.*
***Si*** $a > 0$ ***:***

- $f$ *est décroissante sur* $]-\infty; \alpha]$
- $f$ *est croissante sur* $[\alpha; +\infty[$
- $f$ *admet un minimum en* $\alpha$*, ce minimum vaut* $\beta$

***Si*** $a < 0$ ***:***

- $f$ *est croissante sur* $]-\infty; \alpha]$
- $f$ *est décroissante sur* $[\alpha; +\infty[$
- $f$ *admet un maximum en* $\alpha$*, ce maximum vaut* $\beta$

**Exemple 7.** *1) Étudier les variations de* $f(x) = x^2 - 4x + 1$

$a = 1 > 0$

$\alpha = -\dfrac{-4}{2 \times 1} = 2$

$\beta = f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$

*Forme canonique :* $f(x) = (x-2)^2 - 3$

*Tableau de variations :*

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f$ *est décroissante sur* $]-\infty; 2]$

$f$ *est croissante sur* $[2; +\infty[$

$f$ *admet un minimum de* $-3$ *atteint en* $x = 2$

*2) Étudier les variations de* $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$

$a = -2 < 0$

$\alpha = -\dfrac{4}{2 \times (-2)} = 1$

$\beta = g(1) = -2 + 4 + 1 = 3$

*Forme canonique :* $g(x) = -2(x-1)^2 + 3$

*Tableau de variations :*

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$g$ *est croissante sur* $]-\infty; 1]$

$g$ *est décroissante sur* $[1; +\infty[$

$g$ *admet un maximum de* $3$ *atteint en* $x = 1$

## 4.4 Racines et discriminant

**Définition 14.** *Les* ***racines*** *(ou* ***zéros****) d'une fonction* $f$ *sont les valeurs de* $x$ *pour lesquelles* $f(x) = 0$.

*Pour* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, on calcule le* ***discriminant*** *:*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- *Si* $\Delta > 0$ *: deux racines distinctes* $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- *Si* $\Delta = 0$ *: une racine double* $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- *Si* $\Delta < 0$ *: pas de racine réelle*

**Exemple 8.** ***1)*** *$f(x) = x^2 - 5x + 6$*
$a = 1$, $b = -5$, $c = 6$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$
*Deux racines :*
$x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ *et* $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$
*Forme factorisée :* $f(x) = (x-2)(x-3)$
***2)*** $g(x) = x^2 - 4x + 4$
$\Delta = 16 - 16 = 0$
*Une racine double :* $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2$
*Forme factorisée :* $g(x) = (x-2)^2$
***3)*** $h(x) = x^2 + x + 1$
$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$
*Pas de racine réelle. La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.*

## 4.5 Signe d'une fonction du second degré

**Propriété 8.** *Le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de $a$ et du discriminant $\Delta$.*
***Si** $\Delta > 0$ **:** $f$ a deux racines $x_1 < x_2$*

- *Si $a > 0$ : $f(x) > 0$ sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f(x) < 0$ sur $]x_1; x_2[$*
- *Si $a < 0$ : $f(x) < 0$ sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]x_1; x_2[$*

***Si** $\Delta = 0$ **:** $f$ a une racine double $x_0$*

- *Si $a > 0$ : $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ et $f(x_0) = 0$*
- *Si $a < 0$ : $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ et $f(x_0) = 0$*

***Si** $\Delta < 0$ **:** $f$ n'a pas de racine*

- *Si $a > 0$ : $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$*
- *Si $a < 0$ : $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$*

**Exemple 9.** ***1)*** *Étudier le signe de $f(x) = x^2 - 5x + 6$*
$\Delta = 1 > 0$, *racines :* $x_1 = 2$ *et* $x_2 = 3$
$a = 1 > 0$
*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de $f(x)$* | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f(x) > 0$ *sur* $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$
$f(x) = 0$ *pour* $x = 2$ *et* $x = 3$
$f(x) < 0$ *sur* $]2; 3[$
***2)*** *Étudier le signe de $g(x) = -x^2 + 4x - 4$*
$g(x) = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2$
$\Delta = 0$, *racine double :* $x_0 = 2$
$a = -1 < 0$
*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

*$g(x) < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$*
*$g(x) = 0$ pour $x = 2$*
***3)*** *Étudier le signe de $h(x) = x^2 + 2x + 5$*
$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$
$a = 1 > 0$
*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| *Signe de* $h(x)$ | | $+$ | |

*$h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$*
***4)*** *Étudier le signe de $k(x) = -2x^2 - x - 3$*
$\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$
$a = -2 < 0$
*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| *Signe de* $k(x)$ | | $-$ | |

*$k(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$*

# 5 Applications

## 5.1 Résolution d'inéquations

**Application 1.** ***Exercice 1 :*** *Résoudre $x^2 - 3x - 4 \leq 0$*
***Solution :***
*On étudie le signe de $f(x) = x^2 - 3x - 4$*
$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$
$x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ *et* $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$
$a = 1 > 0$
*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

*$f(x) \leq 0$ sur $[-1; 4]$*
$S = [-1; 4]$

## 5.2 Problèmes d'optimisation

**Application 2.** ***Exercice 2 :*** *On veut construire un enclos rectangulaire le long d'un mur. On dispose de 40 m de grillage pour les trois autres côtés.*

*Quelle doit être la largeur de l'enclos pour que son aire soit maximale ?*

***Solution :***

*Soit $x$ la largeur de l'enclos (perpendiculaire au mur).*

*La longueur est alors $\ell = 40 - 2x$.*

*L'aire est : $A(x) = x(40-2x) = -2x^2 + 40x$*

$A(x) = -2(x^2 - 20x) = -2(x-10)^2 + 200$

$a = -2 < 0$ *: $A$ admet un maximum en $x = 10$*

*Ce maximum vaut $A(10) = 200\ m^2$.*

*Pour une aire maximale, la largeur doit être de 10 m (et la longueur de 20 m).*

# 6 Tableaux récapitulatifs

## 6.1 Fonctions affines

**Fonction affine :** $f(x) = ax + b$

| **Signe de $a$** | **Variations** | **Racine** | **Signe** |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ | Croissante | $x_0 = -\frac{b}{a}$ | $-$ puis $+$ |
| $a < 0$ | Décroissante | $x_0 = -\frac{b}{a}$ | $+$ puis $-$ |
| $a = 0$ | Constante | Aucune ou $\mathbb{R}$ | Constant |

## 6.2 Fonctions du second degré

**Fonction du second degré :** $f(x) = ax^2 + bx + c$

| | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| **Forme de la parabole** | U (vers le haut) | $\cap$ (vers le bas) |
| **Sommet** | $\alpha = -\frac{b}{2a}$ | $\alpha = -\frac{b}{2a}$ |
| **Extremum** | Minimum : $\beta = f(\alpha)$ | Maximum : $\beta = f(\alpha)$ |
| **Variations** | Décroissante puis croissante | Croissante puis décroissante |

## 6.3 Signe selon le discriminant

| | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| **Racines** | 2 racines | 1 racine double | Aucune |
| $a > 0$ | $+$ hors $[x_1; x_2]$ | $+$ sauf en $x_0$ | Toujours $+$ |
| $a < 0$ | $-$ hors $[x_1; x_2]$ | $-$ sauf en $x_0$ | Toujours $-$ |

## 6.4 Formules essentielles

| | |
|---|---|
| **Sommet de la parabole** | $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ ; $\beta = f(\alpha)$ |
| **Forme canonique** | $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ |
| **Discriminant** | $\Delta = b^2 - 4ac$ |
| **Racines (si $\Delta \geq 0$)** | $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| **Forme factorisée (si $\Delta > 0$)** | $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ |