1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et propriétés

Définition 1. *La **fonction exponentielle**, notée* exp *ou* $x \mapsto e^x$*, est l'unique fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *qui vérifie :*

— $f'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

— $f(0) = 1$

Le nombre e *est appelé **nombre d'Euler** et vaut approximativement* $e \approx 2{,}718$.

Propriété 1 (Propriétés algébriques)**.** *Pour tous réels* a *et* b *:*

1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$
2. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
3. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
4. $(e^a)^n = e^{na}$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$
5. $e^0 = 1$

Exemple 1. *Simplifier les expressions suivantes :*

1. $e^3 \times e^5 = e^{3+5} = e^8$
2. $\dfrac{e^7}{e^4} = e^{7-4} = e^3$
3. $(e^2)^3 = e^{2\times 3} = e^6$
4. $e^{-2} \times e^5 = e^{-2+5} = e^3$

1.2 Étude de la fonction

Propriété 2 (Sens de variation et limites)**.** *La fonction exponentielle :*

— *Est **strictement croissante** sur* $\mathbb{R}$

— $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

— $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

— $e^x > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

Propriété 3 (Dérivée)**.** *La fonction* $f(x) = e^x$ *a pour dérivée* $f'(x) = e^x$.
Plus généralement, si u *est une fonction dérivable :*

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Exemple 2. *Calculer les dérivées :*

1. *Si* $f(x) = e^{2x}$*, alors* $f'(x) = 2e^{2x}$
2. *Si* $g(x) = e^{x^2+1}$*, alors* $g'(x) = 2x \times e^{x^2+1}$
3. *Si* $h(x) = e^{-3x}$*, alors* $h'(x) = -3e^{-3x}$

1.3 Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 La fonction logarithme népérien

2.1 Définition et propriétés

Définition 2. *La **fonction logarithme népérien**, notée* ln, *est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.*

Elle est définie sur $]0;+\infty[$ *et pour tout* $x > 0$ *:*

$$y = \ln(x) \Longleftrightarrow e^y = x$$

Remarque 1.
- $\ln(1) = 0$ *car* $e^0 = 1$
- $\ln(e) = 1$ *car* $e^1 = e$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $\ln(e^x) = x$
- *Pour tout* $x > 0$ *:* $e^{\ln(x)} = x$

Propriété 4 (Propriétés algébriques)**.** *Pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :*

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
4. $\ln(a^n) = n\ln(a)$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$
5. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemple 3. *Simplifier les expressions suivantes :*

1. $\ln(2) + \ln(5) = \ln(2 \times 5) = \ln(10)$
2. $\ln(8) - \ln(2) = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln(4)$
3. $\ln(e^3) = 3$
4. $2\ln(3) = \ln(3^2) = \ln(9)$
5. $\ln(1) = 0$

2.2 Étude de la fonction

Propriété 5 (Sens de variation et limites)**.** *La fonction logarithme népérien :*

- *Est **strictement croissante** sur* $]0;+\infty[$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Propriété 6 (Dérivée)**.** *La fonction* $f(x) = \ln(x)$ *a pour dérivée* $f'(x) = \frac{1}{x}$ *sur* $]0;+\infty[$.

Plus généralement, si u *est une fonction dérivable et strictement positive :*

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple 4. *Calculer les dérivées :*

1. *Si* $f(x) = \ln(2x)$*, alors* $f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$
2. *Si* $g(x) = \ln(x^2+1)$*, alors* $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
3. *Si* $h(x) = \ln(3x-1)$*, alors* $h'(x) = \frac{3}{3x-1}$

2.3 Tableau de variations

x	0		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Équations et inéquations

3.1 Avec la fonction exponentielle

Propriété 7. *Pour tous réels a et b :*

$$e^a = e^b \iff a = b$$

$$e^a < e^b \iff a < b$$

Exemple 5. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

1. $e^{2x} = e^5 \iff 2x = 5 \iff x = \dfrac{5}{2}$
2. $e^{x+1} = 3 \iff x + 1 = \ln(3) \iff x = \ln(3) - 1$
3. $e^{3x} \geq e^2 \iff 3x \geq 2 \iff x \geq \dfrac{2}{3}$

3.2 Avec la fonction logarithme

Propriété 8. *Pour tous réels a et b strictement positifs :*

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$$

$$\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$$

Exemple 6. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

1. $\ln(x) = 2 \iff x = e^2$
2. $\ln(2x) = \ln(5) \iff 2x = 5 \iff x = \dfrac{5}{2}$
3. $\ln(x) \leq 1 \iff x \leq e^1 \iff x \leq e$ *avec* $x > 0$
   Donc $S =]0; e]$

4 Limites remarquables

Propriété 9 (Croissances comparées).

— $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

— $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

— $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

— $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

— $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$

— $\lim_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Remarque 2. *Ces limites traduisent que :*

— *L'exponentielle croît plus vite que toute puissance*

— *Le logarithme croît moins vite que toute puissance*

5 Applications

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.
Solution : *Posons* $X = e^x$ *avec* $X > 0$.
L'équation devient : $X^2 - 3X + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 8 = 1$, *donc* $X_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ *et* $X_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$
Donc $e^x = 2$ *ou* $e^x = 1$
D'où $x = \ln(2)$ *ou* $x = 0$
$S = \{0; \ln(2)\}$

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Simplifier* $A = \ln(4) + \ln(5) - \ln(20)$.
Solution :

$$\begin{aligned} A &= \ln(4) + \ln(5) - \ln(20) \\ &= \ln(4 \times 5) - \ln(20) \\ &= \ln(20) - \ln(20) \\ &= 0 \end{aligned}$$