1 La dérivation

1.1 Nombre dérivé et fonction dérivée

Définition 1 (Nombre dérivé). *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.*
*Le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$, est la limite (si elle existe) :*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

*Si cette limite existe, on dit que f est **dérivable** en a.*

Remarque 1. *Le nombre dérivé $f'(a)$ représente :*

- *Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a*
- *Le taux de variation instantané de f en a*

Définition 2 (Fonction dérivée). *Si f est dérivable en tout point de I, on appelle **fonction dérivée** de f sur I, notée f', la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.*

1.2 Interprétation géométrique

Propriété 1 (Équation de la tangente). *La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation :*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 1. *Soit $f(x) = x^2$. Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 2$.*
$f'(x) = 2x$, donc $f'(2) = 4$
$f(2) = 4$
Équation de la tangente : $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$	**Ensemble de dérivabilité**
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

1.4 Opérations sur les dérivées

Propriété 2 (Somme et produit par une constante). *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et k une constante réelle.*

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$
- $(f-g)' = f' - g'$

Exemple 2. *Soit* $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$
$f'(x) = 3 \times 2x + 5 \times 1 - 0 = 6x + 5$

Propriété 3 (Produit). *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I :*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exemple 3. *Soit* $f(x) = (2x+1)(x^2-3)$
Posons $u(x) = 2x + 1$ *donc* $u'(x) = 2$
Posons $v(x) = x^2 - 3$ *donc* $v'(x) = 2x$
$f'(x) = 2(x^2-3) + (2x+1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$

Propriété 4 (Quotient). *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I avec $v(x) \neq 0$ sur I :*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple 4. *Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$*
Posons $u(x) = x + 1$ donc $u'(x) = 1$
Posons $v(x) = x - 2$ donc $v'(x) = 1$
$f'(x) = \dfrac{1 \times (x-2) - (x+1) \times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$

1.5 Dérivée de fonctions composées

Propriété 5 (Dérivée de u^n). *Si u est une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{Z}$:*

$$(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$$

Exemple 5. *Soit $f(x) = (2x+3)^5$*
Posons $u(x) = 2x + 3$, donc $u'(x) = 2$
$f'(x) = 5 \times 2 \times (2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$

Propriété 6 (Dérivées composées usuelles). *Si u est une fonction dérivable sur I :*

— $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ *(avec $u > 0$)*
— $(e^u)' = u'e^u$
— $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ *(avec $u > 0$)*
— $(\sin(u))' = u' \cos(u)$
— $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$

Exemple 6. *Calculer les dérivées suivantes :*
1) $f(x) = e^{3x+1}$
$u(x) = 3x + 1$, *donc* $u'(x) = 3$
$f'(x) = 3e^{3x+1}$
2) $g(x) = \ln(x^2 + 1)$
$u(x) = x^2 + 1$, *donc* $u'(x) = 2x$
$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
3) $h(x) = \sqrt{2x-5}$
$u(x) = 2x - 5$, *donc* $u'(x) = 2$
$h'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$

1.6 Lien entre dérivée et variations

Théorème 1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

— *Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est **strictement croissante** sur I*
— *Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est **strictement décroissante** sur I*
— *Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est **constante** sur I*

Exemple 7. *Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$.*
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$
Tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2 Les primitives

2.1 Définition

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
*Une fonction F est une **primitive** de f sur I si :*

- *F est dérivable sur I*
- *Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$*

Théorème 2. *Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme :*

$$G(x) = F(x) + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Remarque 2.
- *La primitive est l'opération inverse de la dérivation*
- *Il existe une infinité de primitives pour une fonction donnée*
- *Elles diffèrent toutes d'une constante*

2.2 Primitives des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Conditions**
k (constante)	kx	
x	$\frac{x^2}{2}$	
x^n $(n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{2x\sqrt{x}}{3} = \frac{2}{3}x^{3/2}$	$x \geq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

2.3 Opérations sur les primitives

Propriété 7. *Soient f et g deux fonctions admettant des primitives F et G sur I, et k une constante réelle.*

- *Une primitive de $f+g$ est $F+G$*
- *Une primitive de kf est kF*

Exemple 8. *Déterminer une primitive de $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$.*

$$\begin{aligned} F(x) &= 4 \times \frac{x^4}{4} - 6 \times \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 5x \\ &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x \end{aligned}$$

La primitive générale est : $F(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

2.4 Primitives de fonctions composées

Propriété 8 (Primitives usuelles avec u)**.** *Si u est une fonction dérivable sur I :*

- *Une primitive de* $u'u^n$ *est* $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ *(avec* $n \neq -1$*)*
- *Une primitive de* $\dfrac{u'}{u}$ *est* $\ln|u|$ *(avec* $u \neq 0$*)*
- *Une primitive de* $u'e^u$ *est* e^u
- *Une primitive de* $u'\cos(u)$ *est* $\sin(u)$
- *Une primitive de* $u'\sin(u)$ *est* $-\cos(u)$
- *Une primitive de* $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ *est* $\sqrt{u}$ *(avec* $u > 0$*)*

Méthode 1 (Reconnaître la forme $u'f(u)$)**.** *Pour trouver une primitive de ce type :*

1. *Identifier la fonction "intérieure"* u
2. *Vérifier que sa dérivée* u' *apparaît (à une constante près)*
3. *Utiliser la formule correspondante*

Exemple 9. *Déterminer des primitives :*

1) $f(x) = 2x(x^2+1)^3$
On reconnaît $u'u^3$ *avec* $u(x) = x^2+1$ *et* $u'(x) = 2x$
Une primitive est : $F(x) = \dfrac{(x^2+1)^4}{4}$

2) $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+5}$
On reconnaît $\dfrac{u'}{u}$ *avec* $u(x) = x^3+5$ *et* $u'(x) = 3x^2$
Une primitive est : $G(x) = \ln|x^3+5| = \ln(x^3+5)$ *(car* $x^3+5 > 0$ *pour* $x > -\sqrt[3]{5}$*)*

3) $h(x) = 6xe^{3x^2}$
On reconnaît $u'e^u$ *avec* $u(x) = 3x^2$ *et* $u'(x) = 6x$
Une primitive est : $H(x) = e^{3x^2}$

4) $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
On écrit : $k(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$
On reconnaît $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ *avec* $u(x) = x^2+1$ *et* $u'(x) = 2x$
Une primitive est : $K(x) = \sqrt{x^2+1}$

2.5 Primitive avec condition initiale

Méthode 2. *Pour déterminer LA primitive de* f *qui vérifie* $F(x_0) = y_0$ *:*

1. *Déterminer la forme générale des primitives :* $F(x) = \ldots + k$
2. *Utiliser la condition initiale :* $F(x_0) = y_0$
3. *En déduire la valeur de* k
4. *Écrire la primitive particulière*

Exemple 10. *Déterminer la primitive* F *de* $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ *qui vérifie* $F(1) = 5$.

Étape 1 : *Forme générale :* $F(x) = x^3 - x^2 + x + k$
Étape 2 : *Condition initiale :* $F(1) = 1 - 1 + 1 + k = 1 + k = 5$
Étape 3 : *Donc* $k = 4$
Étape 4 : *La primitive cherchée est :* $F(x) = x^3 - x^2 + x + 4$

3 Applications

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Calculer la dérivée de* $f(x) = (3x^2 - 1)e^x$

Solution :

On utilise $(uv)' = u'v + uv'$ *:*
$u(x) = 3x^2 - 1$, *donc* $u'(x) = 6x$
$v(x) = e^x$, *donc* $v'(x) = e^x$
$f'(x) = 6xe^x + (3x^2 - 1)e^x = e^x(6x + 3x^2 - 1) = e^x(3x^2 + 6x - 1)$

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Déterminer une primitive de* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$

Solution :

On remarque que le numérateur est presque la dérivée du dénominateur.
Posons $u(x) = x^2 + 3x + 1$, *donc* $u'(x) = 2x + 3$
On reconnaît $\dfrac{u'}{u}$
Une primitive est : $F(x) = \ln|x^2 + 3x + 1|$

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Étudier les variations de* $f(x) = x - \ln(x)$ *sur* $]0; +\infty[$.

Solution :

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$
Sur $]0; +\infty[$ *:* $x > 0$

- *Si* $0 < x < 1$ *:* $f'(x) < 0$, *donc* f *est décroissante*
- *Si* $x = 1$ *:* $f'(x) = 0$
- *Si* $x > 1$ *:* $f'(x) > 0$, *donc* f *est croissante*

f *admet un minimum en* $x = 1$ *:* $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$

4 Tableaux récapitulatifs

4.1 Dérivées usuelles

Formules essentielles

Fonction	**Dérivée**
$(u+v)'$	$u' + v'$
$(ku)'$	ku'
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)'$	$nu'u^{n-1}$
$(e^u)'$	$u'e^u$
$(\ln u)'$	$\dfrac{u'}{u}$
$(\sqrt{u})'$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

4.2 Primitives usuelles

Formules essentielles

Fonction	**Primitive**
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$