1 Épreuve de Bernoulli

1.1 Définition

Définition 1. *Une* ***épreuve de Bernoulli*** *est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles :*

- *Le* ***succès*** *(souvent noté S), de probabilité p*
- *L'****échec*** *(souvent noté $\overline{S}$), de probabilité $1-p=q$*

Le nombre p est appelé ***paramètre*** *de l'épreuve de Bernoulli, avec $0 \leq p \leq 1$.*

Exemple 1. *Les situations suivantes sont des épreuves de Bernoulli :*

1) On lance une pièce de monnaie :

- *Succès : obtenir Pile, $p = 0{,}5$*
- *Échec : obtenir Face, $1-p = 0{,}5$*

2) On tire une carte dans un jeu de 52 cartes :

- *Succès : obtenir un As, $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$*
- *Échec : ne pas obtenir un As, $1-p = \dfrac{12}{13}$*

3) Un joueur tire un penalty :

- *Succès : marquer le but, $p = 0{,}8$*
- *Échec : ne pas marquer, $1-p = 0{,}2$*

1.2 Variable aléatoire de Bernoulli

Définition 2. *On appelle* ***variable aléatoire de Bernoulli*** *de paramètre p la variable aléatoire X qui prend :*

- *La valeur 1 en cas de succès (probabilité p)*
- *La valeur 0 en cas d'échec (probabilité $1-p$)*

Loi de probabilité :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété 1. *Pour une variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p :*

- ***Espérance*** *: $E(X) = p$*
- ***Variance*** *: $V(X) = p(1-p)$*
- ***Écart-type*** *: $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$*

2 Schéma de Bernoulli

2.1 Définition

Définition 3. *Un* ***schéma de Bernoulli*** *consiste à répéter n fois, de manière* ***indépendante****, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.*

Remarque 1. *Les conditions pour avoir un schéma de Bernoulli sont :*

- *On répète la même épreuve n fois*

- *Les épreuves sont indépendantes*
- *La probabilité de succès p reste constante*
- *On ne s'intéresse qu'au nombre de succès*

Exemple 2. ***1)*** *On lance 5 fois une pièce de monnaie et on compte le nombre de Pile.*
C'est un schéma de Bernoulli avec $n = 5$ *et* $p = 0{,}5$*.*
2) *Un archer tire 10 flèches sur une cible. À chaque tir, la probabilité d'atteindre le centre est de 0,7.*
C'est un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ *et* $p = 0{,}7$*.*
3) *On tire 3 cartes successivement* ***sans remise*** *dans un jeu de 52 cartes.*
Ce n'est ***pas*** *un schéma de Bernoulli car les tirages ne sont pas indépendants (les probabilités changent).*

3 Loi binomiale

3.1 Définition

Définition 4. *Soit* X *la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de la répétition de* n *épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre* p*.*
On dit que X *suit une* ***loi binomiale*** *de paramètres* n *et* p*, notée* $\mathcal{B}(n, p)$*.*
X *peut prendre les valeurs* $0, 1, 2, \ldots, n$*.*

Remarque 2.
- n *est le nombre d'épreuves (entier naturel non nul)*
- p *est la probabilité de succès à chaque épreuve* ($0 \leq p \leq 1$)
- X *compte le nombre total de succès*

3.2 Calcul de probabilités

Propriété 2 (Formule fondamentale)**.** *Si* X *suit une loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$*, alors pour tout* $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *est le coefficient binomial (se lit « k parmi n »).*

Remarque 3 (Coefficient binomial)**.** $\binom{n}{k}$ *représente le nombre de façons de choisir* k *éléments parmi* n*.*
Quelques valeurs particulières :
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Calculatrice : touche $\binom{n}{k}$ *ou « nCr » (combinaisons)*

Exemple 3. *On lance 5 fois une pièce équilibrée. Soit* X *le nombre de Pile obtenus.*
X *suit une loi binomiale* $\mathcal{B}(5; 0{,}5)$*.*
1) *Calculer* $P(X = 2)$ *(obtenir exactement 2 Pile)*

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{5}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^3 \\ &= \frac{5!}{2! \times 3!} \times 0{,}5^5 \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 0{,}03125 \\ &= 10 \times 0{,}03125 \\ &= 0{,}3125 \end{aligned}$$

2) Calculer $P(X = 0)$ (n'obtenir aucun Pile)

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{5}{0} \times 0{,}5^0 \times 0{,}5^5 \\ &= 1 \times 1 \times 0{,}03125 \\ &= 0{,}03125 \end{aligned}$$

3) Calculer $P(X = 5)$ (obtenir 5 Pile)

$$\begin{aligned} P(X=5) &= \binom{5}{5} \times 0{,}5^5 \times 0{,}5^0 \\ &= 1 \times 0{,}03125 \times 1 \\ &= 0{,}03125 \end{aligned}$$

3.3 Loi de probabilité complète

Exemple 4. *Pour $X \sim \mathcal{B}(4; 0{,}6)$, calculons la loi de probabilité complète :*

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
$P(X = k)$	*0,0256*	*0,1536*	*0,3456*	*0,3456*	*0,1296*

Calculs détaillés :

- $P(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0{,}6^0 \times 0{,}4^4 = 1 \times 1 \times 0{,}0256 = 0{,}0256$
- $P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0{,}6^1 \times 0{,}4^3 = 4 \times 0{,}6 \times 0{,}064 = 0{,}1536$
- $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^2 = 6 \times 0{,}36 \times 0{,}16 = 0{,}3456$
- $P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0{,}6^3 \times 0{,}4^1 = 4 \times 0{,}216 \times 0{,}4 = 0{,}3456$
- $P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0{,}6^4 \times 0{,}4^0 = 1 \times 0{,}1296 \times 1 = 0{,}1296$

Vérification : $0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}3456 + 0{,}3456 + 0{,}1296 = 1$

4 Calculs de probabilités

4.1 Probabilités avec inégalités

Méthode 1. *Pour calculer des probabilités avec des inégalités :*

- $P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$
- $P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \ldots + P(X = n)$
- $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$
- $P(X > k) = P(X \geq k + 1)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(X = a + 1) + \ldots + P(X = b)$

Astuce : utiliser l'événement contraire

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

Exemple 5. *Soit* $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}3)$.

1) *Calculer* $P(X = 3)$
$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^7 \approx 0{,}2668$
2) *Calculer* $P(X \leq 2)$
$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
À calculer avec la calculatrice ou les formules.
3) *Calculer* $P(X \geq 7)$
Méthode directe : $P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$
Méthode par l'événement contraire (plus rapide) :
$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6)$
4) *Calculer* $P(2 \leq X \leq 5)$
$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
Ou : $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$

4.2 Utilisation de la calculatrice

Méthode 2 (Calculatrice)**.** *Sur la plupart des calculatrices scientifiques :*

Pour $P(X = k)$ ***:***

- *Menu STAT/DIST → BINOMIAL → Bpd (binomial probability distribution)*
- *Entrer* n*,* p *et* k

Pour $P(X \leq k)$ ***:***

- *Menu STAT/DIST → BINOMIAL → Bcd (binomial cumulative distribution)*
- *Entrer* n*,* p *et* k

Remarque : *Les notations peuvent varier selon les modèles de calculatrice.*

5 Espérance, variance et écart-type

5.1 Formules

Propriété 3. *Si* X *suit une loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$*, alors :*

- ***Espérance*** *:* $E(X) = np$
- ***Variance*** *:* $V(X) = np(1 - p)$
- ***Écart-type*** *:* $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Remarque 4.
- *L'espérance* $E(X) = np$ *représente la valeur moyenne du nombre de succès*
- *La variance mesure la dispersion autour de cette moyenne*
- *L'écart-type est la racine carrée de la variance*

5.2 Interprétation

Exemple 6. *On lance 100 fois un dé équilibré. Soit X le nombre de fois où on obtient un 6.*
X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100; \frac{1}{6})$.
Espérance :

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{6} \approx 16{,}67$$

En moyenne, on s'attend à obtenir environ 17 fois un 6.
Variance :

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{500}{36} \approx 13{,}89$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{13{,}89} \approx 3{,}73$$

Le nombre de 6 obtenus varie en général autour de 17 avec un écart d'environ 4.

6 Applications

6.1 Contrôle qualité

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Une entreprise fabrique des pièces dont 5% sont défectueuses. On prélève un échantillon de 20 pièces.*
Soit X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.
a) *Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*
Solution :
On répète 20 fois l'expérience « prélever une pièce » de manière indépendante.
À chaque fois, la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse est $p = 0{,}05$.
On compte le nombre de succès (pièces défectueuses).
Donc $X \sim \mathcal{B}(20; 0{,}05)$.
b) *Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse.*
$P(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0{,}05^0 \times 0{,}95^{20} = 0{,}95^{20} \approx 0{,}358$
c) *Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces soient défectueuses.*
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$
$P(X = 1) = \binom{20}{1} \times 0{,}05^1 \times 0{,}95^{19} = 20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19} \approx 0{,}377$
$P(X \geq 2) = 1 - (0{,}358 + 0{,}377) = 1 - 0{,}735 = 0{,}265$
d) *Calculer l'espérance et interpréter.*
$E(X) = 20 \times 0{,}05 = 1$
En moyenne, on s'attend à trouver 1 pièce défectueuse dans un échantillon de 20 pièces.

6.2 Jeux et paris

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Un joueur lance 10 fois un dé équilibré. Il gagne 2 € à chaque fois qu'il obtient un 6, sinon il ne gagne rien.*
Soit X le nombre de fois où il obtient un 6.
a) *Quelle loi suit X ?*
$X \sim \mathcal{B}(10; \frac{1}{6})$
b) *Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 2 fois un 6 ?*

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$= 45 \times \frac{1}{36} \times \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0{,}291$$

c) *Calculer son gain moyen.*
$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} \approx 1{,}67$
Gain moyen $= E(X) \times 2 = 1{,}67 \times 2 \approx 3{,}33$ €
En moyenne, le joueur gagne environ 3,33 €.

6.3 Médecine

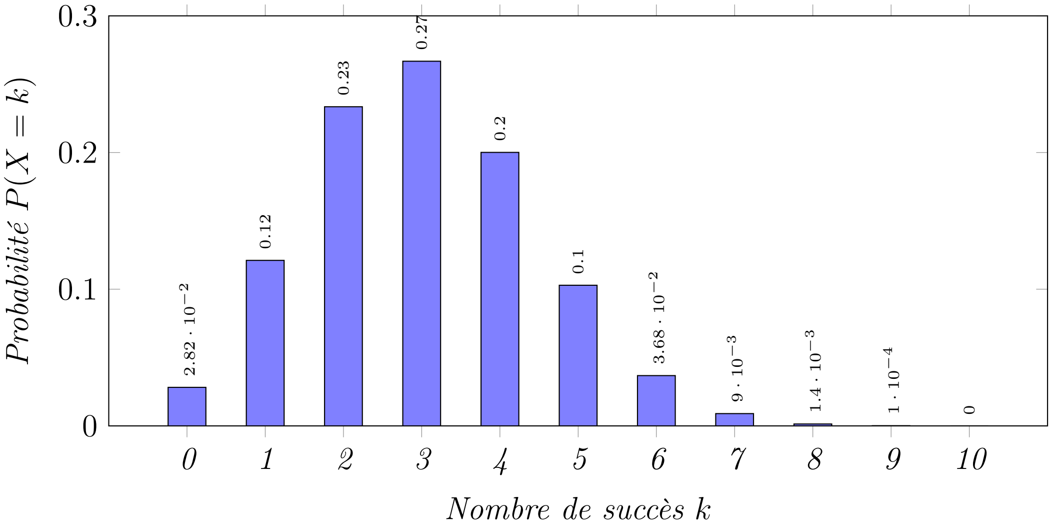
Application 3. ***Exercice 3 :*** *Un traitement médical a une probabilité de réussite de 0,7. On l'administre à 15 patients.*

Soit X le nombre de patients pour lesquels le traitement réussit.
a) *Quelle loi suit X ?*
$X \sim \mathcal{B}(15; 0{,}7)$
b) *Calculer $P(X = 10)$.*
$P(X = 10) = \binom{15}{10} \times 0{,}7^{10} \times 0{,}3^5 \approx 0{,}206$
c) *Calculer la probabilité qu'au moins 12 patients soient guéris.*
$P(X \geq 12) = P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)$
Ou avec la calculatrice : $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11)$
d) *Combien de patients peut-on s'attendre à guérir en moyenne ?*
$E(X) = 15 \times 0{,}7 = 10{,}5$
On s'attend à guérir environ 10 ou 11 patients sur 15.

7 Représentation graphique

7.1 Diagramme en bâtons

Exemple 7. *Représentation graphique de la loi $\mathcal{B}(10; 0{,}3)$:*



Observations :

- *La probabilité maximale correspond à $k = 3$ (proche de $E(X) = 3$)*
- *La distribution est asymétrique car $p \neq 0{,}5$*
- *Les valeurs extrêmes (0 et 10) sont très peu probables*

8 Conditions d'utilisation

8.1 Quand utiliser la loi binomiale ?

Méthode 3 (Vérifier les conditions). *Pour qu'une variable aléatoire suive une loi binomiale, il faut vérifier :*

1. *On répète n fois la même épreuve*
2. *Chaque épreuve a deux issues : succès ou échec*
3. *Les épreuves sont **indépendantes***
4. *La probabilité de succès p est **constante***
5. *On compte le nombre total de succès*

Exemple 8. ***Situations où la loi binomiale s'applique :***

- *Lancer 20 fois une pièce (avec remise implicite)*
- *Tirer 10 cartes avec remise dans un jeu*
- *Interroger 100 personnes de manière indépendante*

Situations où la loi binomiale ne s'applique pas :

- *Tirer 5 cartes sans remise (probabilités non constantes)*
- *Interroger des personnes d'une même famille (pas d'indépendance)*
- *Compter le temps d'attente (pas deux issues)*

8.2 Approximation par tirage sans remise

Remarque 5. *Lorsqu'on effectue un tirage **sans remise** dans une population très grande, on peut approximer par une loi binomiale si :*

$$n \leq 0{,}1N$$

où N est la taille de la population et n le nombre de tirages.

Dans ce cas, les probabilités varient peu et on peut considérer qu'elles restent approximativement constantes.

Exemple 9. *Dans une ville de 100 000 habitants, on interroge 500 personnes.*

$\dfrac{500}{100000} = 0{,}005 < 0{,}1$

On peut utiliser la loi binomiale même si les tirages se font sans remise.

9 Tableaux récapitulatifs

9.1 Formules essentielles

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Probabilité	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Espérance	$E(X)=np$
Variance	$V(X)=np(1-p)$
Écart-type	$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$
Valeurs de X	$0,1,2,\ldots,n$

Coefficient binomial

Définition	$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Propriétés	$\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
Calculatrice	nCr ou $\binom{n}{k}$

9.2 Aide-mémoire

À retenir	**Formule/Méthode**
Épreuve de Bernoulli	2 issues : succès (p) ou échec (1-p)
Schéma de Bernoulli	n répétitions indépendantes
Loi binomiale	Compte le nombre de succès
$P(X=k)$	Formule avec $\binom{n}{k}$
$P(X\leq k)$	Somme ou calculatrice (Bcd)
$P(X\geq k)$	$1-P(X\leq k-1)$
Espérance	np (nombre moyen de succès)